

Αναλυτική Γεωμετρία

Ευθεία

1. ΚΛΙΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

Η κλίση μίας ευθείας (ϵ) μπορεί να βρεθεί με ένα από τους ακόλουθους τρόπους:

(α) Όταν γνωρίζουμε δύο σημεία που ανήκουν στην ευθεία:

Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία που ανήκουν στην ευθεία (ϵ), τότε:

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(γ) Από την εξίσωση $y = \lambda x + \beta$:

Η κλίση λ είναι πάντα ο συντελεστής του x .

(δ) Από την εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$:

Η κλίση λ δίνεται από τον τύπο:

$$\lambda = -\frac{A}{B} \text{ όπου } B \neq 0.$$

(ε) Ειδικές περιπτώσεις:

• Ευθείες παράλληλες με τον $O\Psi$:

λ δεν ορίζεται

• Ευθείες παράλληλες με τον OX :

$\lambda = 0$

2. ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

Η εξίσωση μίας ευθείας (ϵ) μπορεί να βρεθεί με ένα από τους ακόλουθους τρόπους:

(α) Εξίσωση ευθείας με κλίση λ και τεταγμένη επί την αρχή β :

$$y = \lambda x + \beta$$

(β) Γενική μορφή ευθείας:

$$Ax + By + \Gamma = 0$$

Όπου A, B όχι ταυτόχρονα μηδέν

• Αν $A=0$: η ευθεία είναι παράλληλη με τον $OX \Rightarrow$ Μορφή: $y = \alpha$

• Αν $B=0$: η ευθεία είναι παράλληλη με τον $O\Psi \Rightarrow$ Μορφή: $x = \beta$

(γ) Εξίσωση ευθείας παράλληλης με τον OX :

$$y = \alpha$$

(δ) Εξίσωση ευθείας παράλληλης με τον $O\Psi$:

$$x = \beta$$

(ε) Εξίσωση ευθείας που περνά από το σημείο $A(x_1, y_1)$ και με κλίση λ :

$$y - y_1 = \lambda(x - x_1)$$

(ζ) Εξίσωση ευθείας που περνά από την αρχή των αξόνων:

$$y = Ax$$

3. ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

(α) Παράλληλες ευθείες

Αν $(\varepsilon_1): y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $(\varepsilon_2): y = \lambda_2 x + \beta_2$ τότε:

$$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \text{ και } \beta_1 \neq \beta_2$$

(β) Ευθείες που ταυτίζονται

Αν $(\varepsilon_1): y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $(\varepsilon_2): y = \lambda_2 x + \beta_2$ τότε:

$$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \text{ και } \beta_1 = \beta_2$$

(γ) Ευθείες που τέμνονται

Αν $(\varepsilon_1): y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $(\varepsilon_2): y = \lambda_2 x + \beta_2$ τότε:

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

(δ) Κάθετες ευθείες

Αν $(\varepsilon_1): y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $(\varepsilon_2): y = \lambda_2 x + \beta_2$ τότε:

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

(ε) Ευθείες που συντρέχουν (έχουν κοινό σημείο)

Αν οι ευθείες $(\varepsilon_1): A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = 0$, $(\varepsilon_2): A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = 0$ και $(\varepsilon_3): A_3 x + B_3 y + \Gamma_3 = 0$ συντρέχουν, τότε:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

4. ΔΕΣΜΗ ΕΥΘΕΙΩΝ

Δέσμη ευθειών ονομάζεται η οικογένεια ευθειών που έχει τη μορφή:

$$(\varepsilon_\kappa): A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 + \kappa(A_2 x + B_2 y + \Gamma_2) = 0, \kappa \in \mathbb{R}$$

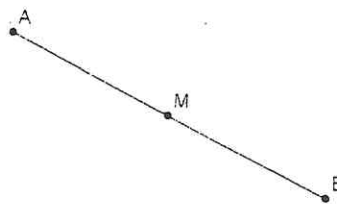
Η (ε_κ) παριστάνει:

- δέσμη ευθειών με κέντρο το σημείο P αν οι ευθείες $(\varepsilon_1): A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = 0$ και $(\varepsilon_2): A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = 0$ τέμνονται στο σημείο P
- δέσμη παραλλήλων ευθειών αν οι ευθείες $(\varepsilon_1): A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = 0$ και $(\varepsilon_2): A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = 0$ είναι παράλληλες.

5. ΜΕΣΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

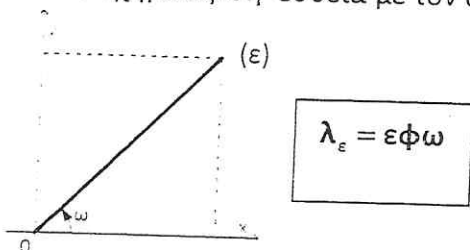
Έστω το ευθύγραμμο τμήμα AB με άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Τότε το μέσο M του ευθύγραμμου τμήματος AB θα έχει τις εξής συντεταγμένες:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



6. ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

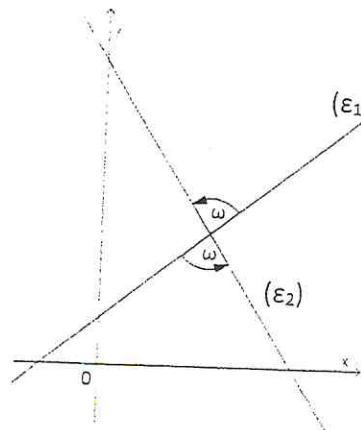
(α) Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα των xx'



(β) Γενική περίπτωση:

- $\varepsilon_1, \varepsilon_2$: ευθείες μη παράλληλες με τον ΟΨ
- ω : προσανατολισμένη γωνία μεταξύ των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$,
- λ_1 : κλίση της ε_1 , λ_2 : κλίση της ε_2

$$\varepsilon\phi\omega = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1 \cdot \lambda_2}$$

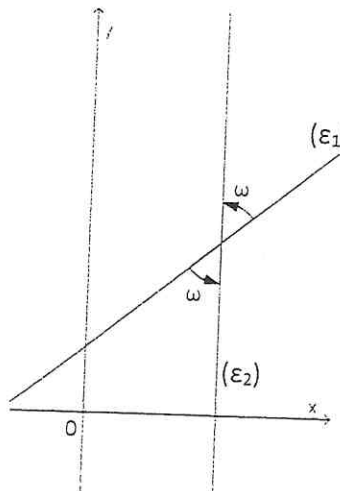


(β) Η μία ευθεία είναι παράλληλη με τον ΟΨ

- ε_1 : μη παράλληλη με τον ΟΨ
- λ_1 : κλίση της ε_1
- ε_2 : παράλληλη με τον ΟΨ
 $\Rightarrow \lambda_2$ δεν ορίζεται

Τότε:

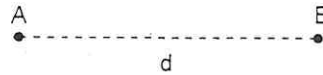
$$\varepsilon\phi\omega = \frac{1}{\lambda_1}$$



7. ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ

Έστω τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Τότε η απόσταση του σημείου B από το σημείο A (και αντίστροφα), δίνεται από τον τύπο:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

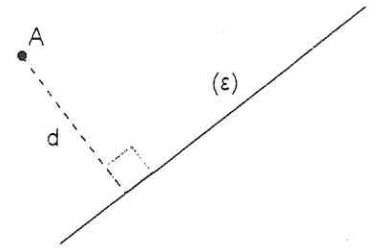


8. ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ

Έστω το σημείο $A(x_1, y_1)$ και η ευθεία $(\varepsilon): Ax + By + \Gamma = 0$.

Η απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε) δίνεται από τον τύπο:

$$d(A, \varepsilon) = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



Ειδική περίπτωση 1

Αν $(\varepsilon_1): x = \alpha$ και σημείο $A(x_1, y_1)$, τότε:

$$d(A, \varepsilon_1) = |x_1 - \alpha|$$

Ειδική περίπτωση 2

Αν $(\varepsilon_2): y = \beta$ και σημείο $A(x_1, y_1)$, τότε:

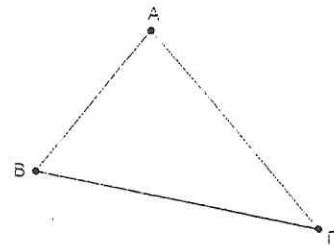
$$d(A, \varepsilon_2) = |y_1 - \beta|$$

9. ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Έστω το τρίγωνο ABΓ με κορυφές $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$.

Το εμβαδόν E του τριγώνου ABΓ δίνεται από τον τύπο:

$$E = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$



Τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$ δεν σχηματίζουν τρίγωνο όταν είναι **συνευθειακά**. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ευθεία

1. Δίνονται τα σημεία $A(2,3)$ και $B(-1,4)$. Να βρείτε:
 - α) την κλίση της ευθείας AB
 - β) την εξίσωση της ευθείας AB
 - γ) την εξίσωση ευθείας που είναι κάθετη στην AB και περνά από το μέσο της
 - δ) την απόσταση του σημείου $\Gamma(1,1)$ από την ευθεία AB
 - ε) τη γωνία A του τριγώνου $AB\Gamma$
 - στ) το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$

2. Τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει εξίσωση ύψους $BD: 4x - \psi + 4 = 0$ και εξίσωση διαμέσου $BM: 2x - 3\psi + 2 = 0$.
Αν $A(-2,3)$ να βρείτε:
 - α) την εξίσωση της πλευράς AG
 - β) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ

3. Τραπεζίο $AB\Gamma\Delta$ ($AB // \Gamma\Delta$) έχει κορυφές $B(2,3)$ και $\Gamma(4,-1)$ και εξίσωση της πλευράς $A\Delta$
 $x + 2\psi + 16 = 0$. Η πλευρά $\Gamma\Delta$ σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$.
 - α) Να βρείτε:
 - ι) την εξίσωση της $\Gamma\Delta$
 - ιι) τις κορυφές A και Δ
 - ιιι) το εμβαδό του τραπεζίου
 - β) Να δείξετε ότι το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

4.
 - α) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών $(\epsilon_1): 3\chi + 4\psi - 11 = 0$ και $(\epsilon_2): 2\chi - 3\psi + 4 = 0$.
 - β) Να βρείτε το μέσο του ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(2, 3)$ και $B(4, -1)$.
 - γ) Να βρείτε το μήκος του AB .
 - δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το μέσο του AB και το σημείο τομής των ευθειών (ϵ_1) και (ϵ_2) .

5. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΟΑΒΓ όπου Ο η αρχή των αξόνων και Β(4,3). Η πλευρά ΟΓ έχει εξίσωση $\psi = 3\chi$ και η πλευρά ΒΓ είναι παράλληλη με τον άξονα Οχ. Να βρείτε:
- τις συντεταγμένες των κορυφών Γ και Α
 - τις συντεταγμένες του σημείου Δ, που βρίσκεται στην προέκταση της πλευράς ΑΒ προς το Β, έτσι ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΔ να είναι διπλάσιο του εμβαδού του παραλληλόγραμμου ΟΑΒΓ.
6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με Α(-1, 4), Β(2, 3) και Γ(-2, 5). Να βρείτε:
- το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ,
 - την απόσταση της κορυφής Α από την ευθεία ΒΓ.
7. Αν Μ(α,β) τυχαίο σημείο του ορθοκανονικού συστήματος xOψ να αντιστοιχίσετε καθένα από τα σημεία της **Στήλης Α** με μία μόνο συμμετρία της **Στήλης Β**.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. Α(β, α)	α. Συμμετρικό ως προς τον x'x
2. Β(-α, -β)	β. Συμμετρικό ως προς τον ψ'ψ
3. Γ(α, -β)	γ. Συμμετρικό ως προς το Ο(0,0)
4. Δ(-α, β)	δ. Συμμετρικό ως προς την $\psi = x$ (*)

8. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): (\lambda + 1)\chi + 2\lambda\psi = 12$. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε η (ε) :
- να είναι παράλληλη με την ευθεία $5\chi - \psi = 15$.
 - να είναι κάθετη στην ευθεία $10\chi - 7\psi = 3$.
 - να σχηματίζει με τους άξονες Οχ και Οψ τρίγωνο εμβαδού 3τ.μ..
9. Τρίγωνο $\triangle ΑΒΓ$ έχει κορυφές τα σημεία Α(3, 5), Β(2, 3) και Γ(5, -1).
- Να αποδείξετε ότι η ΑΓ έχει εξίσωση: $3\chi + \psi - 14 = 0$.
 - Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΒΔ του τριγώνου $\triangle ΑΒΓ$.
 - Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου $\triangle ΑΒΓ$.
 - Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι πλευρές ΑΓ και ΑΒ.

1 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $\Sigma(1,2)$ και έχει κλίση $\lambda=3$.

2 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο τομής των ευθειών $y = 3x - 7$, $3x + 2y = 4$ και την αρχή των αξόνων.

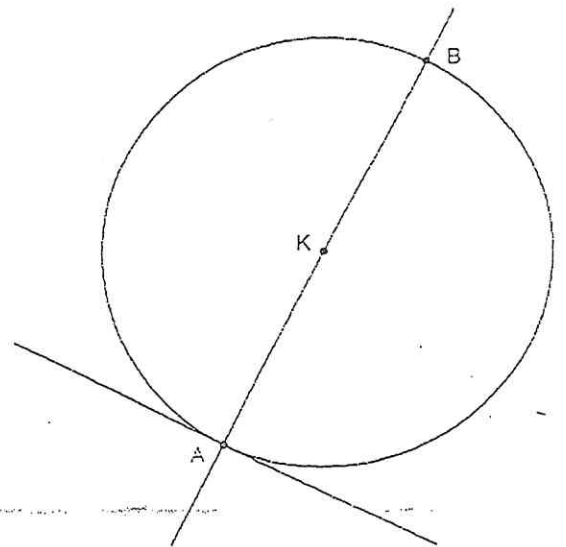
3 Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος AB όπου $A(2,3)$ και $B(-4,5)$.

4 Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές $A(3, -1)$, $B(4,3)$ και $\Gamma(-1,1)$. Να υπολογίσετε το μέγεθος της γωνίας $\hat{A}B\Gamma$ κατά προσέγγιση δεκάτου.

5 Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο $K(2,4)$ και το σημείο του $A(1,-2)$.

Να βρείτε:

- Την εξίσωση της διαμέτρου AB.
- Την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του A.
- Τις συντεταγμένες του σημείου B.



6 Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία: $A(5,2)$, $B(2,-2)$ και $\Gamma(0,2)$

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$).
- Να βρείτε το μήκος του ύψους $\Gamma\Delta$.
- Να βρείτε το μέτρο της γωνίας \hat{B} .

7 Δίνεται ρόμβος ABΓΔ με κορυφή $\Delta(7,-1)$. Αν η εξίσωση της μιας διαγωνίου του είναι $x - y - 2 = 0$ και της πλευράς του $\Gamma\Delta$: $x + 2y - 5 = 0$ να βρείτε:

- Την εξίσωση της άλλης διαγωνίου του.
- Τις συντεταγμένες των κορυφών του A, B, Γ.
- Την εξίσωση της πλευράς του AB.
- Το εμβαδόν του ρόμβου ABΓΔ.

8

Τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει κορυφή $\Gamma(5,5)$ και η εξίσωση μίας διγωνίου του είναι $y = 17 - 5x$. Να βρείτε την εξίσωση της άλλης διαγωνίου του καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου A .

9

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(1,1)$, $B(7,-5)$ και $\Gamma(-3,3)$. Να βρείτε:

- Την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$.
- Την εξίσωση της διαμέσου AM .
- Την εξίσωση του ύψους AD .
- Το μήκος του ύψους AD .
- Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

10

Οι εξισώσεις $3x - 5y - 8 = 0$ και $2x + 3y - 18 = 0$ είναι οι εξισώσεις των πλευρών $A\Gamma$ και $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ αντίστοιχα. Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει κορυφές $A(1,-1)$ και $B(3,4)$

Να βρείτε:

- την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Γ και είναι παράλληλη προς την AB .
- την εξίσωση της διαμέσου ΓM .
- την εξίσωση του ύψους AD .
- το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- το μέτρο της γωνίας Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.

11

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές $B(-3,-1)$ και $\Delta(3,-3)$ και εξισώσεις των πλευρών AD και AB τις $y = -2x + 3$ και $4x - 3y + 9 = 0$ αντίστοιχα.

- Να δείξετε ότι οι κορυφές A και Γ του παραλληλόγραμμου $AB\Gamma\Delta$ έχουν συντεταγμένες $A(0,3)$ και $\Gamma(0,-7)$.
- Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $\Gamma\Delta$.
- Να υπολογίσετε την απόσταση της κορυφής A από την ευθεία $\Gamma\Delta$.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

12

Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με $A(1, 3)$, η εξίσωση της πλευράς AD είναι $x + 2y = 7$ και η εξίσωση μίας διαγωνίου του είναι η $x + y = 7$. Να βρείτε :

- την εξίσωση της άλλης διαγωνίου
- τις συντεταγμένες των κορυφών του
- τη γωνία A (κατά προσέγγιση ακεραίου)
- την περίμετρο του ρόμβου
- την απόσταση μεταξύ των παράλληλων πλευρών
- το εμβαδόν του ρόμβου.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

1. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται οι συντεταγμένες των κορυφών $A(1,3)$, $B(-2,1)$ και $\Gamma(2,-2)$. Να βρείτε:

α) Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Την απόσταση του σημείου B από την ευθεία $3x+4y-18=0$.

2. Δίνονται τα σημεία $A(3,6)$, $B(7,2)$ και $\Gamma(3,-2)$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ισοσκελές.

β) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου AM .

3. Δίνονται τα σημεία $A(-1, 1)$ και $B(0, -2)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας

(ε) που περνά από το σημείο A και η απόσταση του σημείου B από την ευθεία

(ε) είναι ίση με $\sqrt{5}$ μονάδες.

4. Τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει κορυφή $\Delta(5,2)$ και εξίσωση μιας διαγωνίου $2y-x-4=0$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής B .

β) Να βρείτε το μήκος της διαγωνίου $B\Delta$.

γ) Να δείξετε ότι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου είναι $a = \sqrt{10}$ μονάδες.

δ) Με κέντρο την κορυφή Δ και ακτίνα τη ΔA γράφουμε τόξο μέσα στο τετράγωνο.

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη διαγώνιο $A\Gamma$ και το τόξο αυτό.

5. Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με κορυφές $B(-2, 2)$ και

$\Gamma(4, -2)$. Το ύψος BH του τριγώνου έχει εξίσωση: $x + 8y = 14$

α) Να βρείτε:

α) την εξίσωση της πλευράς $A\Gamma$

β) τις συντεταγμένες της κορυφής A

β) Αν οι συντεταγμένες της κορυφής είναι $A(5, 6)$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου Δ έτσι ώστε το τετράπλευρο $BA\Gamma\Delta$ να είναι ρόμβος.

6. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με $A(1,3)$, $B(4,-1)$ και $2x - y = -1$ η εξίσωση μιας διαγωνίου του.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της άλλης διαγωνίου του ρόμβου είναι $x + 2y = 2$.

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ και τις συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ.

(γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του ρόμβου.

7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν οι κορυφές του Α και Γ σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων έχουν συντεταγμένες $(-3,4)$ και $(7,-1)$ αντίστοιχα και οι πλευρές του γ, α έχουν μήκος $2\sqrt{10}$ και $\sqrt{65}$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

- i. Το μέτρο της γωνίας Α του τριγώνου και
- ii. το εμβαδόν του.

8. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 4x + 3y = 26$ και $\varepsilon_2: y = 7x - 33$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α και έστω Β να είναι το σημείο τομής της ε_2 με την ευθεία $x=4$.

- i. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Α.
- ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_3 που περνά από το Β και είναι κάθετη στην ε_1 .
- iii. Να βρείτε το σημείο τομής Γ των $\varepsilon_1, \varepsilon_3$.
- iv. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.
- v. Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ έτσι ώστε το τετράπλευρο ΑΓΒΔ να είναι τετράγωνο.

Ασκήσεις στην ευθεία

- 1) Δίνεται τρίγωνο με κορυφές $A(-2,1)$, $B(5,2)$ και $\Gamma(1,6)$. Να βρεθούν:
- (α) Η εξίσωση της πλευράς ΒΓ
 - (β) Η εξίσωση της διαμέσου ΑΜ
 - (γ) Η εξίσωση του ύψους ΑΔ
 - (δ) Το εμβαδό του τριγώνου
 - (ε) Το μήκος του ύψους
 - (στ) Το μήκος της πλευράς ΒΓ.
- 2) Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κορυφές $A(3,1)$, $B(-1,2)$ και $\Gamma(1,4)$. Να βρεθούν :
- (α) Η εξίσωση της πλευράς ΓΔ
 - (β) Η εξίσωση της πλευράς ΑΔ
 - (γ) Οι συντετεγμένες της κορυφής Δ
 - (δ) Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των διαγώνιων.
- 3) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που :
- (α) περνά από τα σημεία $A(3,-2)$ και $B(4,1)$
 - (β) περνά από το σημείο $A(3,4)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία $2\chi+3\psi-1=0$
 - (γ) περνά από το σημείο $A(3,6)$ και το σημείο τομής των ευθειών $\chi+\psi-4=0$ και $2\chi-\psi-5=0$
- 4) Να υπολογίσετε την τιμή του μ ώστε η ευθεία (ε) : $\mu\chi+2\psi=3$ να είναι
- (α) παράλληλη προς την (ε₁) : $3\chi-2\psi+6=0$
 - (γ) κάθετη προς την (ε₂) : $3\psi+\chi-1=0$
- 5) Αν το μέσο Μ του ΑΒ έχει συντεταγμένες $M(-1,3)$ και το $A(2,-1)$ να βρείτε τις συντεταγμένες του Β.
- 6) Η ευθεία $-5\chi+6\psi=30$ τέμνει τους άξονες ΧΧ' και ΨΨ' στα σημεία Α και Β.
- (α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β.
 - (β) Να βρεθεί ένα σημείο Γ πάνω στον ΧΧ' άξονα έτσι ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές.
- 7) Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκάθετης του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ που έχει άκρα $A(6,4)$ και $B(-4,2)$.
- 8) Για ποιες τιμές του μ οι ευθείες
- (ε₁) : $\mu\chi+(\mu+1)\psi+1=0$ και (ε₂) : $(\mu+2)\chi+6\psi-3=0$ είναι :
- (α) παράλληλες και (β) κάθετες .
- 9) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές $A(3,6)$, $B(7,2)$ και $\Gamma(3,-2)$. Να δείξετε ότι είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣ.

1. Τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει κορυφή $B(1,4)$. Το ύψος AD έχει εξίσωση $AD: y = x + 1$ και η διάμεσος AM έχει εξίσωση $AM: y - 3x = -7$. Να βρείτε:
 - α) τις συντεταγμένες της κορυφής A .
 - β) την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$.
 - γ) τις συντεταγμένες του σημείου M .
 - δ) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ .

2. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν $\Gamma(6,1)$, $\Delta(-3,-1)$ και οι εξισώσεις της πλευράς $A\Delta$ και της διαγωνίου $A\Gamma$ είναι $6x - y + 17 = 0$ και $x + 2y - 8 = 0$ αντίστοιχα, να βρείτε:
 - (α) την εξίσωση της πλευράς AB ,
 - (β) την απόσταση της κορυφής A από το μέσο M της πλευράς $\Gamma\Delta$,
 - (γ) το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με εξισώσεις των πλευρών $AB: x - 2y - 8 = 0$ και $B\Gamma: x + 3y - 18 = 0$ και συντεταγμένες κορυφών $A(6, \alpha)$ και $\Gamma(\gamma, 5)$, $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$.
 - (α) Να αποδείξετε ότι:
 - (i) $\alpha = -1$ και $\gamma = 3$
 - (ii) Η κορυφή B έχει συντεταγμένες $(12, 2)$
 - (β) Να βρείτε:
 - (i) Το μέτρο της γωνιάς B του τριγώνου
 - (ii) Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
 - (iii) Το μήκος του ύψους AD του τριγώνου.

4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(5, -1)$, $B(4, 2)$, $\Gamma(-4, -4)$. Να βρείτε:
 - α) Την εξίσωση και το μήκος της διαμέσου AM .
 - β) Το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.
 - γ) Την απόσταση του M από το ύψος AD .
 - δ) Την εξίσωση του ύψους AD .

5. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ τοποθετημένο σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Αν η κορυφή B του τριγώνου έχει συντεταγμένες $(1, -3)$, η εξίσωση του ύψους του AD είναι $3x + y = 11$ και η εξίσωση της διαμέσου του AM είναι $4x + y = 14$:
 - (α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$ του τριγώνου
 - (β) Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων M , A και Γ είναι:

$$M(4, -2), A(3, 2), \Gamma(7, -1)$$
 - (γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$ του τριγώνου
 - (δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
 - (ε) Να υπολογίσετε την απόσταση της κορυφής B του τριγώνου $AB\Gamma$ από το ύψος του AD .

Δείγμα διαγώνισμα

1. Να λύσετε την εξίσωση: $\left| \begin{array}{cc} x & x-1 \\ x+1 & 2x \end{array} \right| = 5$ (μον 2)
2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $B(-2,1)$ και σχηματίζει με τον άξονα xx' προσανατολισμένη γωνία ίση με 60° . (μον 2)
3. Να δείξετε οι ευθείες με εξισώσεις $\varepsilon_1: 5x - 7y = -1$, $\varepsilon_2: x + 2y - 10 = 0$, $\varepsilon_3: x + y = 7$ διέρχονται από το ίδιο σημείο (συντρέχουν). (μον 2)
4. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: (k+3)y + x + 9 = 0$ και $\varepsilon_2: y = \left(\frac{3k+4}{2}\right)x + 10$. Να βρείτε την αριθμητική τιμή του k ώστε οι ευθείες να είναι μεταξύ τους κάθετες. (μον 2)
5. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$. Η εξίσωση της πλευράς AB είναι $2y - 2x - 14 = 0$ και οι συντεταγμένες των κορυφών $A(-2, k)$, $\Delta(-3, -1)$ $k \in \mathbb{R}$. (μον 1/1/1)
- (α) Να βρείτε την τιμή του k .
(β) Αν το $k = 5$ να βρείτε το μήκος της πλευράς $A\Delta$
(γ) Αν το $k = 5$ να βρείτε το μήκος του ύψους του παραλληλογράμμου που αντιστοιχεί στην πλευρά $\Delta\Gamma$.
6. Αν $A(1,1)$, $B(3,3)$ και $\Gamma(4,1)$ είναι κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$, να βρείτε: (μον 2/2/2/2)
- (α) Την εξίσωση της διαμέσου BM
(β) Το μέτρο της γωνίας A
(γ) Την εξίσωση του ύψους $\Gamma\Delta$
(δ) Να βρείτε το σημείο της ευθείας AB που απέχει ίσες αποστάσεις από τα σημεία A και Γ .

Άσκηση από εξετάσεις

Οι συντεταγμένες των κορυφών ενός τριγώνου $A\hat{B}\Gamma$ είναι $A(0, 3)$, $B(0, 0)$ και $\Gamma(-3, k)$, όπου $k \in \mathbb{R}$.
Η πλευρά $A\Gamma$ έχει εξίσωση $2x - 3y + 9 = 0$.

- (α) (i) Να δείξετε ότι $k = 1$.
(ii) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους $B\Delta$ του τριγώνου $A\hat{B}\Gamma$.
(iii) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους $B\Delta$.
- (β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου E , το οποίο ανήκει στη $B\Delta$ και ισαπέχει από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος AB .

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

1. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

$$\alpha) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\beta) \begin{vmatrix} \eta\mu x & -\sigma\upsilon\nu x & 0 \\ \epsilon\phi x & \sigma\phi x & -1 \\ \sigma\upsilon\nu x & -\eta\mu x & 0 \end{vmatrix}$$

$$\gamma) \begin{vmatrix} x^3 & a^2+1 & 1 \\ a^3 & x^2+1 & 1 \\ 1 & x^2+a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Αν $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{Z}$, να δείξετε ότι ο αριθμός $\begin{vmatrix} \kappa & 3 & 2 \\ \lambda & 7 & 6 \\ \mu & 8 & 8 \end{vmatrix}$ είναι πολλαπλάσιο του 8

3. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$a) \begin{vmatrix} x & 4 \\ 7 & x-3 \end{vmatrix} = 0$$

$$b) \begin{vmatrix} 5 & x & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ x+2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

4. Αν $f(x) = \begin{vmatrix} \eta\mu x & 0 & 1 \\ 1 & \eta\mu x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ να βρείτε την μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η $f(x)$

5. Να λύσετε την ανίσωση $\begin{vmatrix} x & 4 & x \\ 4 & x & 4 \\ x & 4 & 2 \end{vmatrix} > 0$

6. Να δείξετε ότι $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$

Ορίσμος - Αντιόδοι για το SMTI.

$$1 \text{ a) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} \leftarrow = 2 \begin{vmatrix} 3 & 16 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} - 0 + 6 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 [3 \cdot 10 - (-1) \cdot 16] + 6(1 \cdot (-1) - 0 \cdot 3) = 2(30 + 16) + 6 \cdot (-1) = 86.$$

$$b) \begin{vmatrix} u^2x & -6ux & 0 \\ 6yx & 6yx & -1 \\ 6ux & -u^2x & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} u^2x & -6ux \\ 6ux & -u^2x \end{vmatrix} + 0 = \underline{\underline{-u^4x + 6u^2x}}$$

$$1) \begin{vmatrix} x^3 & a^2+1 & 1 \\ a^3 & x^2+1 & 1 \\ 1 & x^2+a^2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} a^3 & x^2+1 \\ 1 & x^2+a^2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} x^3 & a^2+1 \\ 1 & x^2+a^2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} x^3 & a^2+1 \\ a^3 & x^2+1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot [a^3(x^2+a^2) - (x^2+1)] - 1 \cdot [x^3(x^2+a^2) - 1(a^2+1)] + x^3(x^2+1) - a^3(a^2+1) =$$

$$= a^3x^2 + a^5 - x^2 - 1 - (x^5 + a^2x^3 - a^2 - 1) + x^5 + x^3 - a^5 - a^3 =$$

$$= a^3x^2 - x^2 - 1 - x^5 - a^2x^3 + a^2 + 1 + x^5 + x^3 - a^3 =$$

$$= a^3x^2 - a^2x^3 - x^2 + x^3 + a^2 - a^3$$

$$2. \begin{vmatrix} k & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 6 \\ \mu & 8 & 8 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ \mu & 8 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ \mu & 8 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 7 & 7 \\ \mu & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= k(56 - 48) - 3(8\mu - 6\mu) + 2(8\mu - 7\mu) = 8k - 24\mu + 18\mu + 16\mu - 14\mu =$$

$$= 8k - 8\mu + 4\mu = 4(2k - 2\mu + \mu) = \text{πρσ/ΛΙΟ πρσ } 4$$

3.

$$\textcircled{a} \begin{vmatrix} x & 4 \\ 7 & x-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x(x-3) - 28 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 28 = 0 \\ \Rightarrow (x-7)(x+4) = 0 \Rightarrow x=7 \text{ και } x=-4$$

$$\textcircled{b} \begin{vmatrix} 5 & x & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ x+2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x+2 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ x+2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 5(-8-6) - x[-2-2(x+2)] - 2(3-4(x+2)) = 0$$

$$\Rightarrow -70 - x(-2-2x-4) - 2(3-4x-8) = 0 \Rightarrow$$

$$-70 - x(-2x-6) - 2(-4x-5) = 0 \Rightarrow -70 + 2x^2 + 6x + 8x + 10 = 0$$

$$2x^2 + 14x - 60 = 0 \Rightarrow x^2 + 7x - 30 = 0 \Rightarrow (x+10)(x-3) = 0 \Rightarrow$$

$$x = -10, \quad x = 3$$

$$\textcircled{4} f(x) = \begin{vmatrix} \sqrt{x} & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{x} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{x} \begin{vmatrix} \sqrt{x} & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 1 \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{x} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ = \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) + 1 - \sqrt{x} = \\ = \sqrt{x}^2 - \sqrt{x} + 1 - \sqrt{x} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} + 1$$

Η $f(x)$ θα πάρει τη μέγιστη τιμή της όταν $\sqrt{x} = -1$

$$\text{και για } \sqrt{x} = -1 \Rightarrow f(x) = (-1)^2 - 2(-1) + 1 = 4$$

ΛΥΚΕΙΟ ΛΙΝΟΠΕΤΡΑΣ

Σχολική Χρονιά 2019-2020

Α' Λυκείου Προσανατολισμού

Βαθμός:.....

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Β' ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ
Τμήματα: Α21, Α22, Α23, Α24, Α31, Α32, Α33

Ημερομηνία: 10/02/2020

Όνομα μαθητή/τριας..... Τμήμα:.....

άσκηση 1 (μον. 1/1/1)	άσκηση 2 (μον. 1,5/1,5/2,5/1,5/2)	άσκηση 3 (μον. 2/1/1)	άσκηση 4 (μον. 2/2)

Καλή Επιτυχία!

- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(1,6)$ και
 - από το σημείο $B(0,4)$,
 - σχηματίζει με τον άξονα των τετμημένων γωνία 135° ,
 - είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων.
- Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται η εξίσωση της πλευράς $A\Gamma$ και του ύψους AD , που είναι οι $3x - 2y - 2 = 0$ και $x - y + 1 = 0$ αντίστοιχα και η κορυφή $B(4,0)$. Αν μια από τις άλλες κορυφές του τριγώνου είναι το σημείο $(4,5)$, να βρείτε:
 - την εξίσωση της ευθείας AB ,
 - την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$,
 - το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$,
 - το μήκος του ύψους GE ,
 - το μέτρο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι ευθείες $A\Gamma$ και AD .
- Δίνεται η εξίσωση $(\varepsilon_\mu): (\mu^2 - 5\mu + 6)x - (\mu^2 - 9)y + \mu - 5 = 0, \mu \in \mathbb{R}$.
 - Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου μ , η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία.
 - Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) την τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία να είναι παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων.
 - Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) την τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): 3x - 4y + 12 = 0$ και $(\varepsilon_2): -6x + 8y + 36 = 0$.
Να υπολογίσετε:
 - την απόσταση των δύο ευθειών,
 - την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας των δύο ευθειών.

ΚΟΙΝΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
Α' ΛΥΚΕΙΟΥ
(Προτεινόμενες λύσεις)

(1) (α) εξίσωση ευθείας που περνά από τα σημεία A(1, 6) και B(0, 4)

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{6-4}{1-0} = 2 \\ y - y_1 &= \lambda(x - x_1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - 4 = 2(x - 0) \Rightarrow 2x - y + 4 = 0$$

Η διαφορετικά, με τον τύπο $\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2}$

$$\frac{x-1}{1-0} = \frac{y-6}{6-4} \Rightarrow 2x-2 = y-6 \Rightarrow 2x - y + 4 = 0$$

(β) η ευθεία σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία 135° και η κλίση της είναι

$$\lambda = \varepsilon\varphi 135^\circ = -1$$

$$y - 6 = -1(x - 1) \Rightarrow x + y - 7 = 0$$

(γ) είναι παράλληλη με τον άξονα των x και συνεπώς έχει εξίσωση: $y = 6$

(2) Ελέγχουμε αν το σημείο (4, 5) ανήκει στις ευθείες (ΑΓ): $3x - 2y - 2 = 0$ και

$$(ΑΔ): x - y + 1 = 0$$

Πληροί τις δύο εξισώσεις και συνεπώς ανήκει και στις δύο ευθείες. Είναι η κορυφή Α

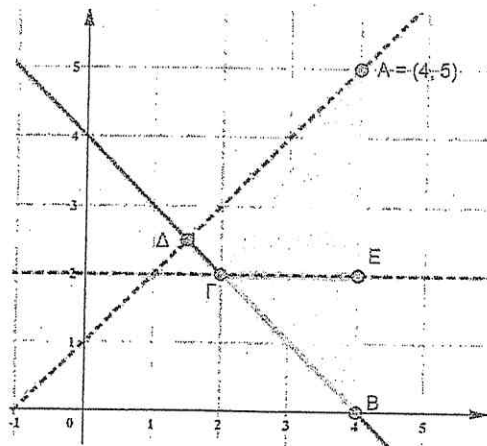
(α) Η ευθεία ΑΒ περνά από τα σημεία A(4, 5) και B(4, 0). Η εξίσωση της είναι: $x = 4$

(β) Η ΒΓ είναι κάθετη στο ύψος ΑΔ

$$\text{Συνεπώς: } \lambda_{ΑΔ} = 1 \Rightarrow \lambda_{ΒΓ} = -1$$

Εξίσωση της ΒΓ που περνά από το (4, 0):

$$y - 0 = -1(x - 4) \Rightarrow y = -x + 4$$



Βρίσκουμε το σημείο Γ.

$$\left. \begin{aligned} y &= -x + 4 \\ 3x - 2y - 2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3x - 2(-x + 4) - 2 = 0 \Rightarrow 5x - 10 = 0 \Rightarrow x = 2, y = 2$$

Κορυφή Γ(2, 2)

(γ) Εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ: $E = \frac{1}{2}|D|$ όπου $D = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4(-2) - 5(4-2) + 8 = -10$

Συνεπώς: $E = \frac{1}{2}|-10| = 5$ τετραγωνικές μονάδες

(δ) Το μήκος του ύψους ΓΕ από το σχήμα είναι 2 μονάδες. (ή διαφορετικά με τον τύπο)

$$(\varepsilon) \varepsilon\varphi\omega = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1 \lambda_2} = \frac{\frac{3}{2} - 1}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \omega = 11,31^\circ$$

λ_2 : κλίση της ευθείας ΑΓ λ_1 : κλίση της ευθείας ΑΔ

(3) Δίνεται η εξίσωση: $(\mu^2 - 5\mu + 6)x - (\mu^2 - 9)y + \mu - 5 = 0$

(α) Θα παριστάνει ευθεία όταν οι συντελεστές Α και Β δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα.

Δηλαδή $\mu^2 - 5\mu + 6 \neq 0$ και $\mu^2 - 9 \neq 0$

$(\mu - 3)(\mu - 2) \neq 0$ και $(\mu - 3)(\mu + 3) \neq 0$ που συμβαίνει όταν $\mu \neq 3$

(β) για να είναι η ευθεία παράλληλη με τον άξονα των ψ πρέπει να είναι της μορφής $x = c$

Για $\mu = 3 \Rightarrow -2 = 0$ (απορρίπτεται)

Για $\mu = -3 \Rightarrow -6(-5)x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{15}$ (δεκτή)

(γ) Όταν η ευθεία περνά από την αρχή των αξόνων $(0, 0)$ τότε θα ισχύει:

$$(\mu^2 - 5\mu + 6) \cdot 0 - (\mu^2 - 9) \cdot 0 + \mu - 5 = 0 \Rightarrow \mu = 5$$

(4) Οι ευθείες $(\varepsilon_1): 3x - 4y + 12 = 0$ και $(\varepsilon_2): -6x + 8y + 36 = 0$ έχουν αντίστοιχα κλίσεις

$\lambda_1 = \frac{3}{4}$ και $\lambda_2 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Συνεπώς είναι παράλληλες

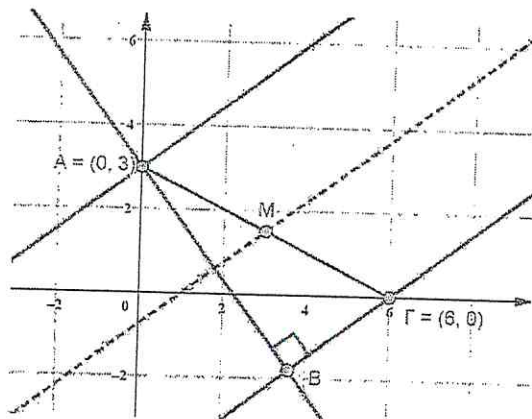
(α) Ένα σημείο της ε_1 είναι το $A(0, 3)$. Η απόσταση του Α από την ευθεία ε_2 είναι:

$$d(A, \varepsilon_2) = \frac{|-6 \cdot 0 + 8 \cdot 3 + 36|}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{60}{10} = 6 \mu$$

(β) Βρίσκουμε ένα άλλο τυχαίο σημείο της ε_2 . Η ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $\Gamma(6, 0)$. Το μέσο του ΑΓ είναι το $M\left(3, \frac{3}{2}\right)$

Η μεσοπαράλληλη ευθεία με κλίση $\lambda = \frac{3}{4}$, που περνά από το Μ, έχει εξίσωση:

$$y - \frac{3}{2} = \frac{3}{4}(x - 3) \Rightarrow 3x - 4y - 3 = 0$$



Όνοματεπώνυμο: _____ Τμήμα:

Διδάσκουσα:

Ημερομηνία:

Μάθημα: Μαθηματικά (Κατεύθυνσης)

Σχόλια:

Βαθμός:

Υπογραφή κηδεμόνα:

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!!:

1. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη με την $2\psi = \chi + 3$ και διέρχεται από το σημείο $(1, -3)$.
2. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη με την $\psi = 2\chi + 5$ και διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$.
3. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_1: \chi + 2\psi = -3$ και $\varepsilon_2: 3\chi - 2\psi = 7$ και από το σημείο $(2, 4)$.
4. Το $M(1, 3)$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB . Αν $A(-2, 7)$, να βρεθούν οι συντεταγμένες του B .

5. Να δείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές $A(-5,4)$, $B(1,8)$ και $\Gamma(5,2)$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
6. Η απόσταση του σημείου $\Sigma(\kappa, 1)$ από την ευθεία $3x + 4y + 3 = 0$ είναι 2 μονάδες. Να βρείτε τις τιμές του κ .
7. Τα σημεία $A(1, -1)$, $B(3,4)$ και $\Gamma(-5,0)$ είναι κορυφές τριγώνου. Να βρείτε:
- (α) Την εξίσωση και το μήκος της διαμέσου AM .
 - (β) Την εξίσωση και το μήκος του ύψους AD .
 - (γ) Το εμβαδόν του τριγώνου.
 - (δ) Την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες που συμπίπτουν με τις πλευρές AB και $A\Gamma$.
8. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $A(-1,2)$, $\Gamma(7,2)$,
 $AB: x - 2y + 5 = 0$ και $B\Gamma: x + 2y - 11 = 0$. Να βρείτε:
- α. Την εξίσωση της $\Delta\Gamma$.
 - β. Τις συντεταγμένες της κορυφής B .
 - γ. Τις συντεταγμένες του μέσου M της διαγωνίου $A\Gamma$.
 - δ. Τις συντεταγμένες της κορυφής Δ .
 - ε. Την εξίσωση της $B\Delta$.

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

TEST των ευθειών (Εξετασιακό 2015-16)

1. (Ε): $2y = x + 3 \Rightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \Rightarrow \lambda_{(Ε)} = \frac{1}{2}$ Η ζητούμενη ευθεία είναι παράλληλη της (Ε) \Rightarrow θα έχει ίδια κλίση. Από εφέρε το σημείο $A(1, -3)$ και κλίση $\lambda = \frac{1}{2}$
 $y - y_1 = \lambda(x - x_1) \Rightarrow y + 3 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow 2y + 6 = x - 1 \Rightarrow x - 2y - 7 = 0$

2. (Ε) $y = 2x + 5 \Rightarrow \lambda_{(Ε)} = 2$ Η ζητούμενη ευθεία είναι \perp στην (Ε) $\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$ και εφέρε και το σημείο $A(1, -1) \Rightarrow y - y_1 = \lambda(x - x_1) \Rightarrow y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow 2y + 2 = -x + 1 \Rightarrow x + 2y + 1 = 0$

3. Για να βρούμε το σημείο τομής των 2 ευθειών λύστε το σύστημα των εξισώσεων τους

$$\left. \begin{array}{l} (Ε_1): x + 2y = -3 \\ (Ε_2): 3x - 2y = 7 \end{array} \right\} +$$

$$4x = 4 \Rightarrow x = 1 \text{ και από την } (Ε_1) \Rightarrow 1 + 2y = -3 \Rightarrow$$

$2y = -4 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow$ οι 2 ευθείες τέμνονται στο σημείο $A(1, -2)$
Η ζητούμενη ευθεία περνά από το σημείο $A(1, -2)$ και $B(2, 4)$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{4 + 2}{2 - 1} = \frac{6}{1} = 6 \Rightarrow y - y_1 = \lambda(x - x_1) \Rightarrow y + 2 = 6(x - 1) \Rightarrow y + 2 = 6x - 6 \Rightarrow 6x - y - 8 = 0 \text{ είναι η ζητούμενη ευθεία}$$

4. $A(-2, 7)$ $M(1, 3)$ $B(x, y)$ Από τον τύπο του μέσου M ενός ευθύγραμμου τμήματος έχουμε:
 $M\left(\frac{-2+x}{2}, \frac{7+y}{2}\right)$ και αφού γνωρίζουμε το $M(1, 3)$

$$\Rightarrow \frac{-2+x}{2} = 1 \Rightarrow -2+x = 2 \Rightarrow x = 4 \text{ και } \frac{7+y}{2} = 3 \Rightarrow 7+y = 6 \Rightarrow y = -1$$

Από $B(4, -1)$

5. $A(-5,4)$ $B(1,8)$ $\Gamma(5,2)$

$$|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = \sqrt{(1+5)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$$

$$|A\Gamma| = \sqrt{(5+5)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{100+4} = \sqrt{104}$$

$$|B\Gamma| = \sqrt{(5-1)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

Από $AB = B\Gamma \Rightarrow \triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές

Γιό να δείψουμε ότι το $\triangle AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο, αρκεί να δείψουμε ότι ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα

Από $(A\Gamma)^2 = (\sqrt{104})^2 = 104$

$(AB)^2 + (B\Gamma)^2 = (\sqrt{52})^2 + (\sqrt{52})^2 = 52 + 52 = 104 \Rightarrow (A\Gamma)^2 = (AB)^2 + (B\Gamma)^2$

Από δείψουμε ότι το $\triangle AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

Το γεγονός ότι το $\triangle AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο θα μπορούσαμε να το αποδείψουμε και με τις κλίσεις ως εξής:

$$\lambda_{AB} = \frac{8-4}{1+5} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \lambda_{B\Gamma} = \frac{2-8}{5-1} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\lambda_{AB} \cdot \lambda_{B\Gamma} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = 1 \Rightarrow AB \perp B\Gamma \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ$$

6. Έχετε ως δεδομένο ότι

$$d(\Sigma, \epsilon) = 2 \Rightarrow \frac{|3k+4+3|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 2 \Rightarrow$$

$$\frac{|3k+7|}{5} = 2 \Rightarrow |3k+7| = 10 \quad \text{Έχετε 2 περιπτώσεις:}$$

(i) $3k+7=10$

$$3k=3 \Rightarrow$$

$$k=1$$

(ii) $3k+7=-10$

$$3k=-17$$

$$k = -\frac{17}{3}$$

Από το k μπορεί να πάρει τις τιμές

$$k=1 \quad \text{και} \quad k = -\frac{17}{3}$$

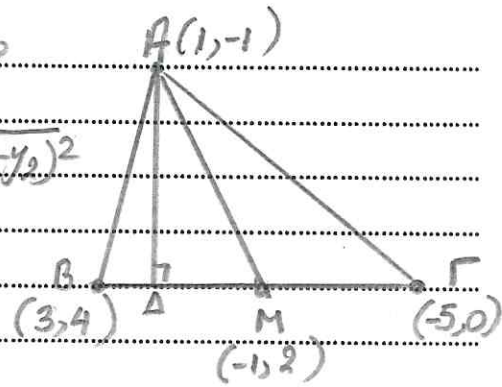
$\Sigma(k,1)$

$d=2$

$(\epsilon): 3x+4y+3=0$

7. α) Για το μήκος της AM χρησιμοποιούμε το
 μέτρο $M = M\left(\frac{3+5}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = M(-1, 2)$

Από $A(1, -1) M(-1, 2) \Rightarrow |AM| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$
 $= \sqrt{(1-(-1))^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$



β) Για την εξίσωση του ύψους AD
 χρησιμοποιούμε την κλίση της AD

Θα βρούμε την κλίση της $B\Gamma \Rightarrow \rho_{B\Gamma} = \frac{4-0}{3-(-5)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Από $AD \perp B\Gamma \Rightarrow \rho_{AD} = -2$ και $A(1, -1)$

Από εξίσωση ύψους AD: $y - y_1 = \rho_{AD}(x - x_1) \Rightarrow y + 1 = -2(x - 1) \Rightarrow$
 $y + 1 = -2x + 2 \Rightarrow 2x + y - 1 = 0$ (AD)

Για να βρούμε το μήκος του ύψους AD χρησιμοποιούμε την εξίσωση
 της ευθείας BΓ. Επειδή $\rho_{B\Gamma} = \frac{1}{2}$ και $\Gamma(-5, 0) \Rightarrow$

$y - y_1 = \rho_{B\Gamma}(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x + 5) \Rightarrow 2y = x + 5 \Rightarrow x - 2y + 5 = 0$

$|AD| = d(A, (B\Gamma)) = \frac{|1 - 2(-1) + 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}} \Rightarrow |AD| = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ μονάδες

γ) 1^{ος} τρόπος: $|B\Gamma| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} =$
 $= \sqrt{(3+5)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$

Από $E_{AB\Gamma} = \frac{b \cdot v}{2} = \frac{(B\Gamma)(AD)}{2} = \frac{\sqrt{80} \cdot \frac{8}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{8 \cdot \sqrt{80}}{2}$

$= \frac{8 \cdot \sqrt{16}}{2} = 4 \cdot 4 = 16$ τετρ. μονάδες

2^{ος} τρόπος: Βρίσκουμε την απόσταση

$= 5 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5(-1-4) + 4+3 = 25+7=32$

$\Rightarrow E = \frac{1}{2} |32| = \frac{1}{2} \cdot 32 = 16$

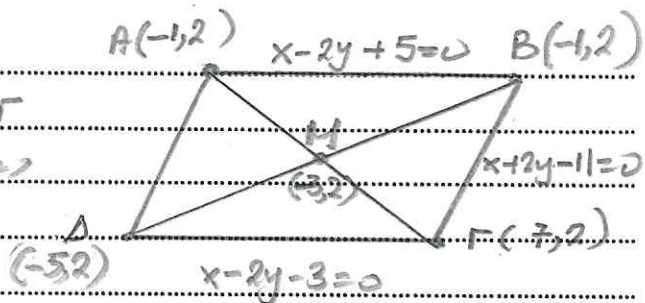
τετρ. μονάδες

δ) $\rho_{AB} = \frac{4+1}{3-1} = \frac{5}{2}$, $\rho_{A\Gamma} = \frac{0+1}{-5-1} = -\frac{1}{6}$ Αν η ευθεία η αφεύκει ορισμό

τότε $\epsilon_{\psi\omega} = \frac{\rho_{AB} - \rho_{A\Gamma}}{1 + \rho_{AB} \cdot \rho_{A\Gamma}} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{1}{6}}{1 + \frac{5}{2} \cdot (-\frac{1}{6})} = \frac{\frac{16}{6}}{\frac{7}{12}} =$

$= \frac{16 \cdot 12}{7 \cdot 6} \Rightarrow \epsilon_{\psi\omega} = \frac{32}{7} \Rightarrow W = 77,66$

8) α) $\Delta\Gamma \parallel AB \Rightarrow \lambda_{\Gamma\Delta} = \lambda_{AB} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$
 και $\Gamma(7,2)$ Άρα η εξίσωση της $\Delta\Gamma$
 είναι $y - y_1 = \lambda(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{2}(x - 7) \Rightarrow$
 $2y - 4 = x - 7 \Rightarrow x - 2y - 3 = 0$ ($\Gamma\Delta$)



β) Για να βρούμε το Β πρέπει να λύσουμε το σύστημα των
 εξισώσεων των AB και BC
 $\left. \begin{array}{l} x - 2y + 5 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{array} \right\} + \Rightarrow 2x + 2 = 0 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$
 και για $x = -1$ στην $x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow -1 + 2y - 3 = 0$
 $\Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(-1, 2)$

γ) $M_{AB} = \left(\frac{-1+7}{2}, \frac{2+2}{2} \right) \Rightarrow M(-3, 2)$

δ) $AB \parallel CD \neq$ \Rightarrow οι διαγώνιοι του διχοτομούνται \Rightarrow το M
 είναι μέσο και της BD :



Εφαπτε: $M\left(\frac{x-1}{2}, \frac{y+2}{2}\right)$ και $M(-3, 2)$
 $\Rightarrow \frac{x-1}{2} = -3 \Rightarrow x-1 = -6 \Rightarrow x = -5$ και $\frac{y+2}{2} = 2 \Rightarrow y+2 = 4$
 $\Rightarrow y = 2 \Rightarrow \Delta(-5, 2)$

(ε) $\lambda_{BD} = \frac{2-2}{-1-5} = 0$ $B(-1, 2) \Rightarrow y - 2 = 0$ ($x+1$) \Rightarrow
 $y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$

2^{ος} τρόπος:

Άρα $B(-1, 2)$ και $\Delta(-5, 2)$ (το 2 αυτών
 είναι ίσο τεταγμένη) το $d \Rightarrow$ η εξίσωση της
 BD είναι η $y = 2$

ανδρας κηλετιου

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Β' ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ

Όνομα μαθητή:

Τμήμα : _____

Ημερομηνία: _____

Άσκηση	1	2	3	4	5
Μονάδες					

1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία:

- α) διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$ και σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα των τετμημένων
β) διέρχεται από το σημείο $A(3, 4)$ και είναι κάθετη στον άξονα των τετμημένων
γ) διέρχεται από το σημείο $A(2, 3)$ και είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων

(μον. 1-1-1)

2. Να υπολογίσετε την τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες $(2\mu + 1)x - 3\mu y - 2 = 0$ και $3\mu x + (\mu + 2)y + 1 = 0$ να είναι κάθετες.

(μον. 2.5)

3. Δίνονται τα σημεία $A(0, 5)$, $B(1, 2)$, $\Gamma(5, 6)$ και $\Delta(\alpha, -8)$. Να υπολογίσετε:

- α) το μήκος του ύψους AH του τριγώνου $AB\Gamma$.
β) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
γ) την γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$
δ) την τιμή του α ώστε τα σημεία B , Γ και Δ να είναι συνευθειακά
ε) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η εξίσωση $x - y + 1 + \kappa(x - 5y + 25) = 0$

(μον. 1.5-1-1.5-1.5-1)

4. Τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει κορυφή $A(-8, 2)$ και εξίσωση μιας διαγωνίου $7x - y + 8 = 0$.
Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ .

(μον.3.5)

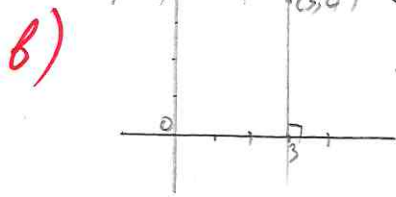
5. Δίνονται τα σημεία $A(-1, 1)$, $B(4, -1)$ και $\Gamma(6, 4)$.

- α) Να αποδείξετε ότι η $\widehat{AB\Gamma}$ είναι ορθή
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο $AB\Gamma$
γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ του παραλληλογράμμου $A\Gamma\Delta B$

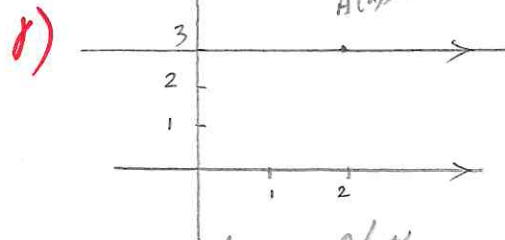
(μον. 1.5-1-2)

Πύξες διαγωνισμάτων Πυθαγόρεια τριώνηφα 2015-16

1. a) $\left. \begin{matrix} \lambda = \text{εφ} 135 = -1 \\ \text{φ}(0, 2) \end{matrix} \right\} \Rightarrow y - 2 = -1(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = -x + 2}$



$\Rightarrow \boxed{x = 3}$

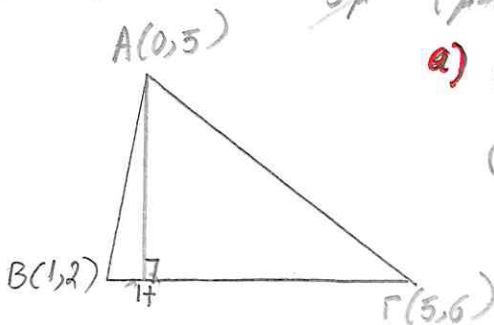


$\Rightarrow y = 3$

2. (E₁): $(2k+1)x - 3ky - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{E_1} = -\frac{A}{B} = -\frac{2k+1}{-3k} = \frac{2k+1}{3k}$
 (E₂): $3kx + (k+2)y + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{E_2} = -\frac{A}{B} = \frac{-3k}{k+2}$ } Αγών (E₁) ⊥ (E₂)

$\Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Rightarrow \frac{2k+1}{3k} \cdot \left(\frac{-3k}{k+2}\right) = -1 \Rightarrow -2k-1 = -k-2 \Rightarrow -k = -1 \Rightarrow k = 1$

3. a) Μικρός ύψους AH: Σχεματίστε την επίκλιση της (BΓ).



$\lambda_{B\Gamma} = \frac{6-2}{5-1} = \frac{4}{4} = 1$ B(1, 2)

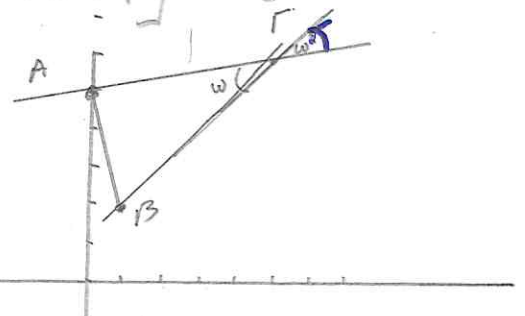
εφ. (BΓ): $y - 2 = 1(x - 1) \Rightarrow y - 2 = x - 1 =$

$\Rightarrow \boxed{(B\Gamma) \quad x - y + 1 = 0} \quad A(0, 5)$

$|AH| = d = \left| \frac{0 - 5 + 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \right| = \left| \frac{-4}{\sqrt{2}} \right| = \frac{4\sqrt{2}}{2} = \underline{2\sqrt{2}}$

b) $E = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left[0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \right] = \frac{1}{2} [-5(1-5) + 1(6-10)]$

$= \frac{1}{2} (20 - 4) = \frac{16}{2} = 8 \text{ τ.μ.}$



γ) εφ Γ = εφ ω = $\frac{\lambda_{B\Gamma} - \lambda_{A\Gamma}}{1 + \lambda_{B\Gamma} \lambda_{A\Gamma}}$, $\begin{matrix} \lambda_{B\Gamma} = 1 \\ \lambda_{A\Gamma} = \frac{6-5}{5} = \frac{1}{5} \end{matrix}$

$\Rightarrow \text{εφ} \Gamma = \frac{1 - \frac{1}{5}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{4 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \hat{\Gamma} = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33,7^\circ$

δ) B(1, 2) Γ(5, 6) Δ(a, -8) τα B, Γ, Δ είναι συνευθειακά \Leftrightarrow

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ a & -8 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ a & -8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 + 8 - 2(5 - a) + 1(-40 - 6a) = 0 \Rightarrow 14 - 10 + 2a - 40 - 6a = 0$

$\Rightarrow -4a - 36 = 0 \Rightarrow 4a = -36 \Rightarrow a = -9$

2^{ος} Τρόπος: Για να είναι συνευθειακά πρέπει το Δ(a, -8) να επαυθενεί τη (BΓ): $x - y + 1 = 0 \Rightarrow a + 8 + 1 = 0 \Rightarrow a = -9$

3 ε) $x - y + 1 + k(x - 5y + 25) = 0$

(E1): $x - y + 1 = 0$

(E2): $x - 5y + 25 = 0$

Ελέγχω τις κλίσεις για να δω αν είναι παράλληλες

$\rho_1 = -\frac{1}{-1} = 1$

$\rho_2 = -\frac{1}{-5} = \frac{1}{5}$

Από $\rho_1 \neq \rho_2 \Rightarrow$ οι (E1), (E2) δεν είναι παράλληλες

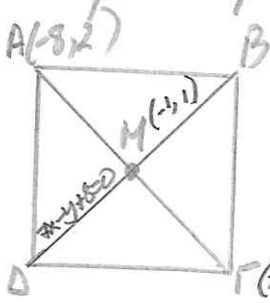
Από τα τετράγωνα:
$$\left. \begin{array}{l} x - y + 1 = 0 \\ x - 5y + 25 = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array} \} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + 1 = 0 \\ -x + 5y - 25 = 0 \end{array} \right\} +$$

$$\frac{4y - 24 = 0}{4y - 24 = 0} \Rightarrow y = 6$$

Για $y = 6 \Rightarrow x - 6 + 1 = 0 \Rightarrow x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

Από η εξίσωση: $x - y + 1 + k(x - 5y + 25) = 0$ παριστάνει
 έναν τριγωνικό κύκλο με κέντρο το $P(5, 6)$

4.



Ελέγχω αν το $A(-8, 2)$ είναι ευθεία της
 διαγωνίου με εξίσωση $7x - y + 8 = 0$

$\Rightarrow 7 \cdot (-8) - 2 + 8 = -56 - 2 + 8 = -50 \neq 0 \Rightarrow$

το A δεν είναι ευθεία της $7x - y + 8 = 0 \Rightarrow$

η $7x - y + 8 = 0$ είναι η διαγωνίος BD

Θα βρω το ευθεία της M των 2 διαγωνίων. Από χαρακτηριστική
 της εξίσωσης της ΑΓ: $\rho_{AG} = -\frac{7}{1} = -7 \Rightarrow \rho_{AG} = -\frac{1}{7}$ (διότι οι διαγωνίους
 του τετραγώνου τέττονται \perp)

Εξο (ΑΓ): $\rho = -\frac{1}{7}$, $A(-8, 2)$: $y - 2 = -\frac{1}{7}(x + 8) \Rightarrow 7y - 14 = -x - 8 \Rightarrow$

\Rightarrow (ΑΓ): $\boxed{x + 7y - 6 = 0}$ Θα βρω ευθεία των (BD), (ΑΓ)

(BD): $7x - y + 8 = 0 \quad | \cdot 7$
 (ΑΓ): $x + 7y - 6 = 0 \quad | \cdot 1$

$$\left. \begin{array}{l} 49x - 7y + 56 = 0 \\ x + 7y - 6 = 0 \end{array} \right\} + \Rightarrow 50x + 50 = 0$$

$$\boxed{x = -1}$$

Για $x = -1 \Rightarrow 7 \cdot (-1) - y + 8 = 0 \Rightarrow -7 - y + 8 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow M(-1, 1)$

Με τον τύπο του Μέσου θα βρω το $\Gamma(x, y)$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x - 8}{2} = -1 \Rightarrow x - 8 = -2 \Rightarrow x = 6 \\ \frac{y + 2}{2} = 1 \Rightarrow y + 2 = 2 \Rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma(6, 0)$$

5. $A(-1,1)$ $B(4,-1)$ $\Gamma(6,4)$

a) $\rho_{AB} = \frac{-1-1}{4+1} = -\frac{2}{5}$, $\rho_{B\Gamma} = \frac{4+1}{6-4} = \frac{5}{2}$

$\rho_{AB} \cdot \rho_{B\Gamma} = -\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = -1 \Rightarrow AB \perp B\Gamma \Rightarrow$

$\rightarrow \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 90^\circ$

b) Αφού η $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 90^\circ \Rightarrow$ θα βγαίνει σε

διαμέτρο κύκλου και άρα AB

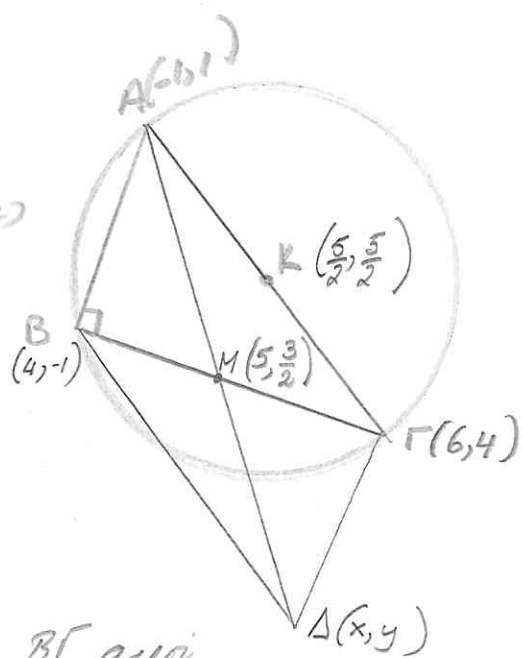
διάμετρος $\Rightarrow K\left(\frac{-1+6}{2}, \frac{1+4}{2}\right) \Rightarrow K\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

γ) Θα βρω το M το οποίο είναι μέσο του BΓ αφού οι διαμέτρους του \neq διχοτομούνται

$\rightarrow M\left(\frac{6+4}{2}, \frac{4-1}{2}\right) \Rightarrow M\left(5, \frac{3}{2}\right)$

Θα βρω το $\Delta(x,y)$ με τον τύπο του φέρου για το AB

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x-1}{2} = 5 \Rightarrow x-1=10 \Rightarrow x=11 \\ \frac{y+1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow y+1=3 \Rightarrow y=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\Delta(11,2)}}$$



ΛΥΚΕΙΟ ΛΙΝΟΠΕΤΡΑΣ

Σχολική Χρονιά 2018-19

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΝΟΤΗΤΑ 4 – ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ -ΕΥΘΕΙΑ

9/1/2019

ΟΝΟΜΑ

ΒΑΘΜΟΣ

$\frac{19\frac{1}{2}}{20}$

1. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

α. $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

β. $\begin{vmatrix} 9 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

(β2)

2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας:

- i. που περνά από το σημείο (-3,2) και έχει κλίση -4.
- ii. που σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x και περνά από το σημείο (-5,1)
- iii. που περνά από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη με την ευθεία $x-3y+4=0$
- iv. που είναι κάθετη στην ευθεία $y=2x+4$ και περνά από το σημείο (4,-3).

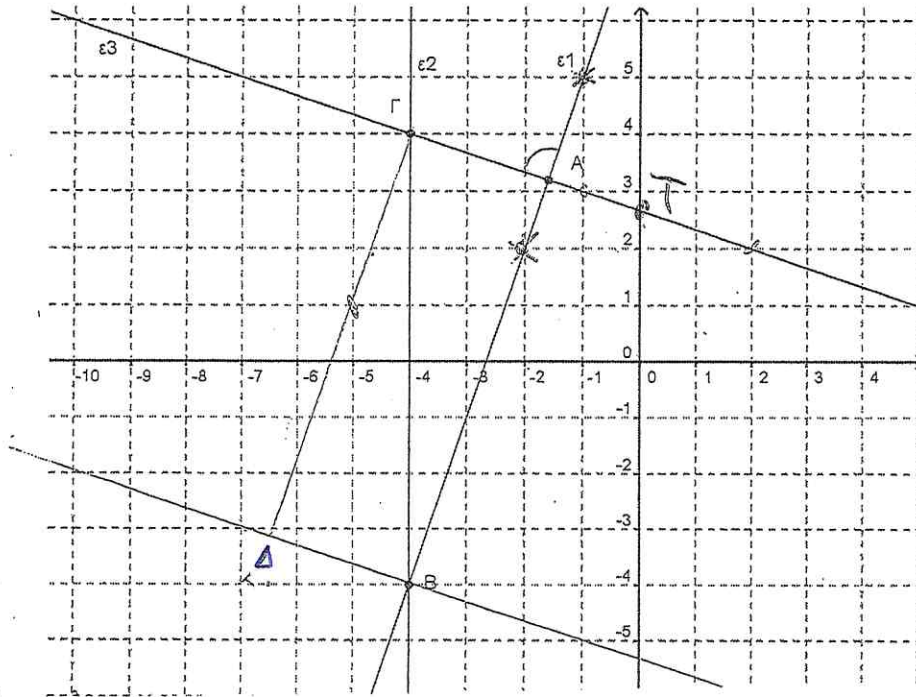
3. Αν σημεία $A(-3,-5)$, $B(0,4)$ και $\Gamma(2,\kappa)$ είναι συνευθειακά να υπολογίσετε το κ .

(β2)

4. Δίνονται τα σημεία $A(-3,4)$, $B(1,1)$ και $\Gamma(-3,-1)$ τα οποία είναι κορυφές τριγώνου. Να βρείτε
- i. την εξίσωση του ύψους $A\Delta$
 - ii. τις συντεταγμένες του σημείου Δ
 - iii. το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

5. Με βάση τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις των ευθειών ϵ_1 , ϵ_2 και ϵ_3
- να υπολογίσετε την ~~αξία~~ γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_3
 - να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία A και Γ
 - να βρείτε το σημείο τομής της ϵ_3 με τον άξονα των y
 - να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ έτσι ώστε το $AB\Delta$ να είναι ορθογώνιο.

(β5)

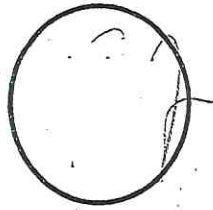


ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ: ΕΥΘΕΙΑ - ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

13/1/2017

ΟΝΟΜΑ _____

ΒΑΘΜΟΣ



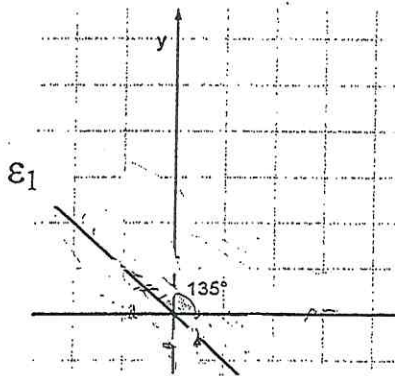
1. Να λύσετε την εξίσωση $\left| \begin{matrix} x-2 & x \\ 2 & x+3 \end{matrix} \right| = 0$

(10B)

2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία A(-1,3) και B(1,8).

(10B)

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ_1



(5B)

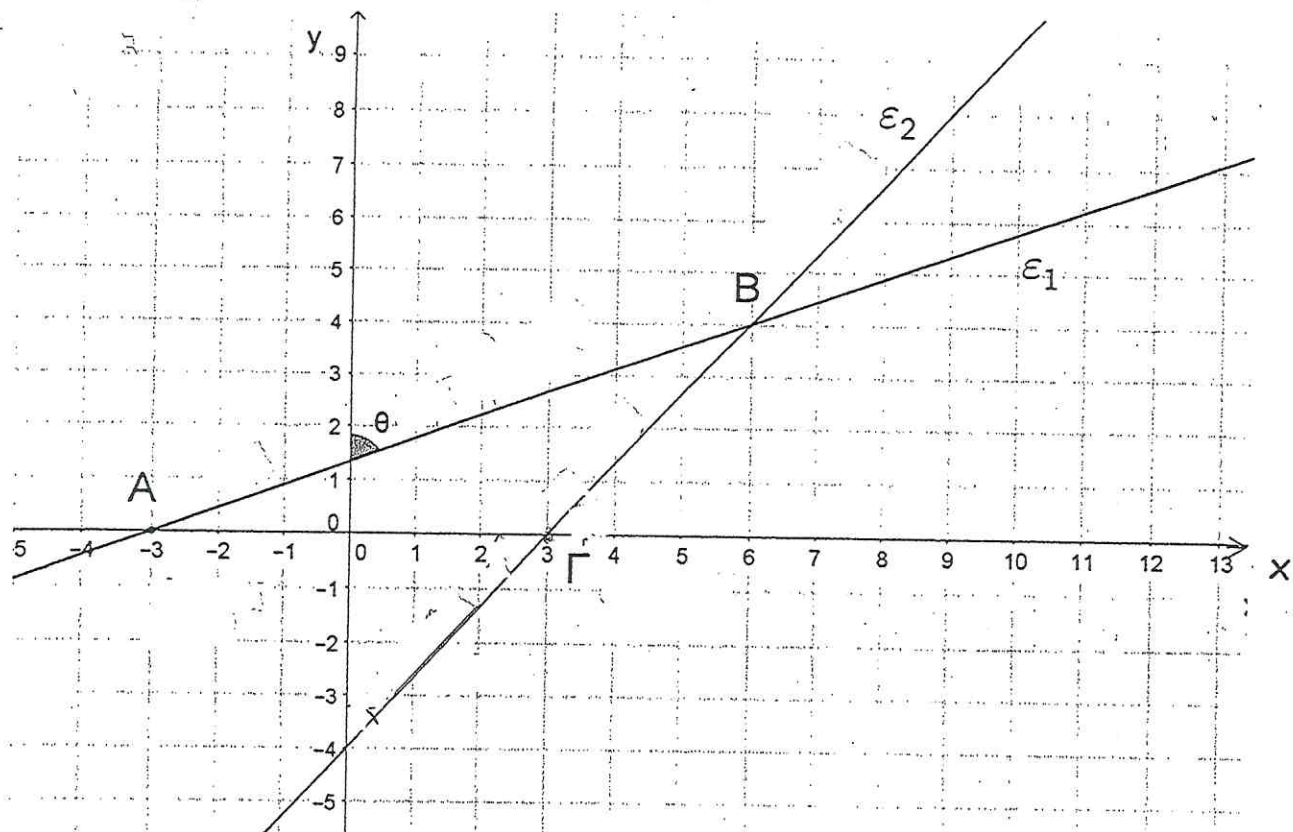
4. Να υπολογίσετε την τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες

$(\epsilon_1) : (2\mu+1)x - 3\mu y - 2 = 0$

$(\epsilon_2) : 3\mu x + (\mu+2)y + 1 = 0$ να είναι κάθετες.

(10B) (+)

5.



Στο πιο πάνω σχήμα δίνονται οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 καθώς και το σημείο τομής των ευθειών Β. Η ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 τέμνουν τον άξονα των τετμημένων στα σημεία Α και Γ αντίστοιχα.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ϵ_2 είναι $3y = 4x - 12$.

Να βρείτε:

β. Την εξίσωση της ευθείας ϵ_1 .

γ. Την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ϵ_2 .

δ. Το μέγεθος της γωνίας θ (γωνία που σχηματίζει η ϵ_1 με τον άξονα των τεταγμένων).

ε. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

6. Οι εξισώσεις των δύο υψών του τριγώνου ΑΒΓ είναι $x-1=0$ και $x+y-1=0$. Αν η κορυφή Α έχει συντεταγμένες Α(2,1) να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

(25B)

ΛΥΚΕΙΟ ΛΙΝΟΠΕΤΡΑΣ

Σχολική Χρονιά 2016-2017

Α' Λυκείου Προσανατολισμού

Βαθμός:

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Α' ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ – ΟΜΑΔΑ Β'

Όνομα μαθητή/τριας: _____

Τμήμα: A.3.1

Ημερομηνία: 16/11/2016

Άσκηση	1	2	3	4
Μονάδες				

1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία:
- διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$ και σχηματίζει γωνία 120° με τον άξονα των τετμημένων.
 - διέρχεται από τα σημεία $B(2, 0)$ και $\Gamma(2, 6)$
 - διέρχεται από τα σημεία $\Delta(1, -1)$ και $E(4, -1)$
 - περνά από το σημείο τομής των ευθειών $y = 2x - 5$, $2x - 3y + 1 = 0$ και την αρχή των αξόνων.
(μον. 8 - 6 - 6 - 9)
2. Δίνονται τα σημεία $A(3, 2)$, $B(4, -3)$, $\Gamma(-2, 1)$ και $\Delta(\alpha, 7)$.
- Να δείξετε ότι το $B\Gamma$ ανήκει στην ευθεία $2x + 3y + 1 = 0$.
 - Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους AH του τριγώνου $AB\Gamma$.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
 - Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας B του τριγώνου $AB\Gamma$.
 - Να υπολογίσετε την τιμή του α ώστε τα σημεία A , B και Δ να είναι συνευθειακά.
(μον. 6 - 7 - 8 - 7 - 8)
3. Ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ έχει κορυφή $A(-6, 6)$ και η εξίσωση μιας διαγωνίου του είναι $3x - 2y + 4 = 0$.
Να βρείτε την εξίσωση της άλλης διαγωνίου του καθώς και τις συντεταγμένες της κορυφής Γ .
(μον. 20)
4. Δίνονται τα σημεία $A(-1, -1)$, $B(-2, 4)$ και $\Gamma(3, 5)$.
- Να αποδείξετε ότι η $\widehat{A\Gamma B}$ είναι ορθή γωνία.
 - Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο $AB\Gamma$.
(μον. 7 - 8)