

• Λύση άσκησης 4 (σελίδα 28)

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα του Μέσης Τιμής στις πιο κάτω συναρτήσεις:

(α) Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x$, $x \geq 0$

Αν $x > 0$, τότε για την f ισχύουν τα εξής:

- η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0, x]$
- η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, x)$

Αρα, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, σύμφωνα με το οποίο

υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Η παράγωγος της f δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x) = e^x.$$

Επομένως:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow e^\xi = \frac{e^x - e^0}{x - 0} \Leftrightarrow e^\xi = \frac{e^x - 1}{x}$$

Όμως $0 < \xi < x \Leftrightarrow e^0 < e^\xi < e^x$ (αφού η e^x είναι γνησίως αύξουσα)

$$\Leftrightarrow 1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x \quad \left(\text{αφού } e^\xi = \frac{e^x - 1}{x} \right)$$

$$\Leftrightarrow x < e^x - 1 < xe^x \quad (\text{αφού } x > 0)$$

$$\Leftrightarrow x + 1 < e^x < 1 + xe^x \quad (\text{αφού } x > 0)$$

Αν $x = 0$, τότε ισχύει η εξής ισότητα:

$$0 + 1 = e^0 = 1 + 0 \cdot e^0$$

$$\Leftrightarrow 1 = 1 = 1$$

Άρα έχουμε αποδείξει ότι $x + 1 \leq e^x \leq 1 + xe^x$, $x \geq 0$

• Λύση άσκησης 5 (σελίδα 28)

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$

Αν $x < 1$, τότε για την f ισχύουν τα εξής:

- η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[x, 1]$
- η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(x, 1)$

Αρα, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, σύμφωνα με το οποίο

υπάρχει $\xi \in (x, 1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$. Η παράγωγος της f δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Επομένως:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln x}{x - 1}$$

$$\text{Όμως } x < \xi < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1} < \frac{\ln x}{x - 1} < \frac{1}{x} \quad \left(\text{αφού } \frac{1}{\xi} = \frac{\ln x}{x - 1} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - 1}{x} < \ln x < x - 1 \quad (\text{αφού } x - 1 < 0)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$$

Αν $x > 1$, τότε για την f ισχύουν τα εξής:

- η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[1, x]$
- η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1, x)$

Αρα, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, σύμφωνα με το οποίο

υπάρχει $\xi \in (1, x)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f'(\xi) = \frac{f(1) - f(x)}{1 - x}$. Η παράγωγος της f δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Επομένως:

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln 1 - \ln x}{1 - x} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{-\ln x}{1 - x}$$

$$\text{Όμως } 1 < \xi < x \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{-\ln x}{1 - x} < \frac{1}{1} \quad (\text{αφού } \frac{1}{\xi} = \frac{-\ln x}{1 - x})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{\ln x}{x - 1} < \frac{1}{1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - 1}{x} < \ln x < x - 1 \quad (\text{αφού } x - 1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$$

Αν $x = 1$, τότε ισχύει η εξής ισότητα:

$$1 - \frac{1}{1} = \ln 1 = 1 - 1$$

$$0 = 0 = 0$$

Άρα έχουμε αποδείξει ότι $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1, \quad x > 0$

• **Λύση άσκησης 6 (σελίδα 28)**

Δίνεται ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = 2\beta$, $f(\beta) = 2\alpha$.

(α) Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2x$, $x \in [\alpha, \beta]$

Για την g ισχύουν τα εξής:

Η $g(x)$ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Επίσης

$$\left. \begin{aligned} g(\alpha) &= f(\alpha) - 2\alpha = 2\beta - 2\alpha = 2(\beta - \alpha) > 0 \\ g(\beta) &= f(\beta) - 2\beta = 2\alpha - 2\beta = 2(\alpha - \beta) < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0$$

$\Rightarrow$ Ισχύει το Θεώρημα Bolzano στο $[a, \beta]$

Άρα η $g(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α, β)

$\Leftrightarrow$ Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$

$\Leftrightarrow$ Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) - 2x_0 = 0$

$\Leftrightarrow$ Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 2x_0$

$\Leftrightarrow$ Η $f(x) = 2x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α, β) .

(β) Για την $f(x) = 2x$, $x \in \left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ ισχύουν τα εξής:

- η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$
- η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Άρα, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, σύμφωνα με το οποίο υπάρχει $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - 2\alpha}{\frac{\alpha+\beta-2\alpha}{2}} = \frac{\alpha+\beta-2\alpha}{\frac{\beta-\alpha}{2}} = \frac{2(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha} = 2$$

Για την $f(x) = 2x$, $x \in \left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ ισχύουν τα εξής:

- η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$
- η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$

Άρα, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, σύμφωνα με το οποίο υπάρχει $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{2\beta - 2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{2\beta - \alpha - \beta}{2}} = \frac{2\beta - \alpha - \beta}{\frac{\beta - \alpha}{2}} = \frac{2(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} = 2$$

Επομένως,

$$f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 2 \cdot 2 = 4$$