

1.1 ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ – ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

1.1.1 ΧΡΗΣΙΜΑ ΟΡΙΑ

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

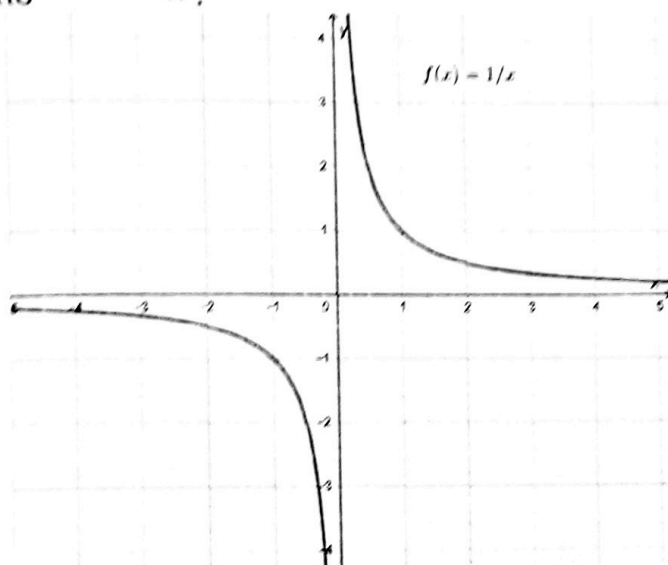
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Τα αποτελέσματα των πιο πάνω ορίων φαίνονται στη γραφική παράσταση της

συνάρτησης με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}$:



Σημειώσεις:

Το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ δεν υπάρχει διότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$.

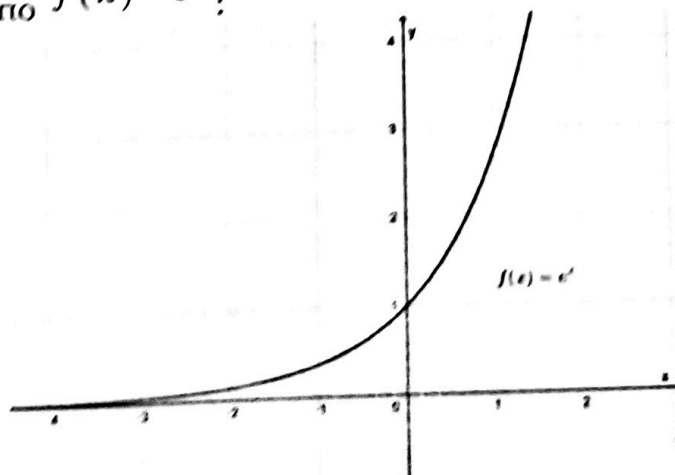
Το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ υπάρχει διότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Τα αποτελέσματα των πιο πάνω ορίων φαίνονται στη γραφική παράσταση της

συνάρτησης με τύπο $f(x) = e^x$:

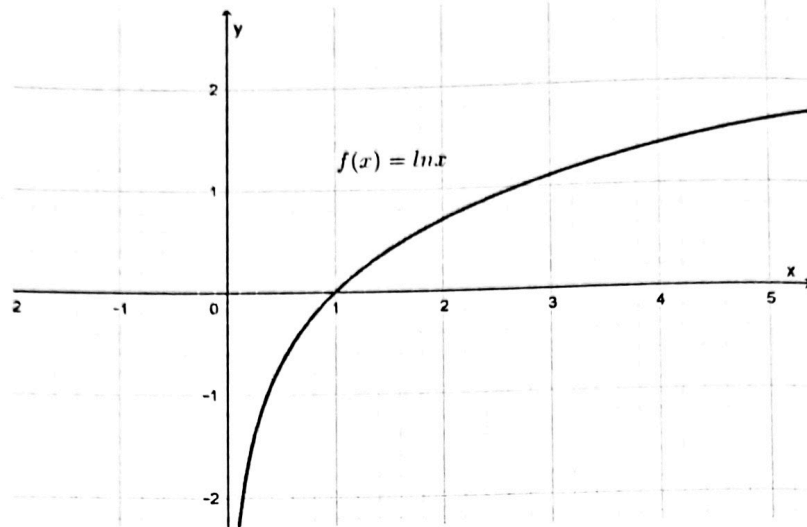


1.1 Απροσδιόριστες Μορφές - Κανόνες De L' Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Τα αποτελέσματα των πιο πάνω ορίων φαίνονται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \ln x$:



1.1.2 ΕΠΙΤΡΕΠΤΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

1. $a + \infty = +\infty, \quad a \in \mathbb{R}$	7. $-\infty - \infty = -\infty$
2. $a - \infty = -\infty, \quad a \in \mathbb{R}$	8. $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
3. $a \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{av } a > 0 \\ -\infty, & \text{av } a < 0 \end{cases}$	9. $(-\infty)(-\infty) = +\infty$
4. $a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{av } a > 0 \\ +\infty, & \text{av } a < 0 \end{cases}$	10. $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
5. $\frac{a}{\pm\infty} = 0, \quad a \in \mathbb{R}$	11. $a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & \text{av } a > 1 \\ 0, & \text{av } 0 \leq a < 1 \end{cases}$
6. $+\infty + \infty = +\infty$	12. $(+\infty)^a = +\infty, \quad \text{av } a > 0$

1.1.3 ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

1. $+\infty - \infty$	5. $1^{\pm\infty}$
2. $0 \cdot (\pm\infty)$	6. $(+\infty)^0$
3. $\frac{+\infty}{+\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}$	7. 0^0
4. $\frac{0}{0}$	

Θεώρημα 1

Αν $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

και υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο),

τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Σημείωση

- Το θεώρημα ισχύει και για πλευρικά όρια νοουμένου ότι πληρούνται οι προϋποθέσεις

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{e^{x-1} - 1}$.

Λύση

Μεθοδολογία

Για να βρούμε ένα όριο της μορφής $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$,

- Βρίσκουμε ξεχωριστά τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- Αν και τα δύο όρια είναι 0, δηλαδή το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ οδηγεί σε $\frac{0}{0}$ απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$ τότε εφαρμόζουμε τον κανόνα De L' Hospital.
- Αν και το νέο όριο οδηγεί σε απροσδιοριστία, τότε επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (e^{x-1} - 1) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0,$$

Δηλαδή, έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)'}{(e^{x-1} - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{e^{x-1}} = \frac{1}{e^0} = \frac{1}{1} = 1$$

Επομένως, σύμφωνα με τον κανόνα De L' Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{e^{x-1} - 1} = 1$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \sin x}$.

Λύση

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{-x} - 2) = e^0 + e^0 - 2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x) = 1 - \sin 0 = 1 - 1 = 0,$$

Δηλαδή, έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(1 - \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\eta \mu x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - e^{-x}) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\eta \mu x) = 0$$

Πάλι παρουσιάζεται απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(\eta \mu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{e^0 + e^0}{\cos 0} = \frac{1+1}{1} = 2$$

Επομένως, σύμφωνα με τον κανόνα De L' Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \sin x} = \underline{\underline{2}}$$

1.1.5 ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\frac{\infty}{\infty}$ **Θεώρημα 2**

Αν $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$$

και υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο),
τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Σημείωση:

Το Θεώρημα 2 εφαρμόζεται και όταν το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ οδηγεί σε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{+\infty}{-\infty}$ ή $\frac{-\infty}{+\infty}$ ή $\frac{-\infty}{-\infty}$.

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-x) - x}{x - e^{-x}}$.

Λύση**Μεθοδολογία**

Για να βρούμε ένα όριο της μορφής $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$,

- Βρίσκουμε ξεχωριστά τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- Αν και τα δύο όρια είναι ίσα με $+\infty$ ή $-\infty$, δηλαδή το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ οδηγεί σε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$ τότε εφαρμόζουμε τον κανόνα De L' Hospital.
- Αν και το νέο όριο οδηγεί σε απροσδιοριστία, τότε επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(1-x) - x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - e^{-x}) = -\infty$$

Δηλαδή, έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{+\infty}{-\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\ln(1-x) - x)'}{(x - e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{1 + e^{-x}} = 0$$

Επομένως, σύμφωνα με τον κανόνα De L' Hospital

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-x) - x}{x - e^{-x}} = 0$$

1.1.6 ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\pm\infty \cdot 0$ **Παράδειγμα 4**

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$.

Λύση**Μεθοδολογία**

Για να βρούμε ένα όριο της μορφής $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)]$

- Βρίσκουμε ξεχωριστά τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- Αν το ένα όριο είναι $+\infty$ ή $-\infty$ και το άλλο είναι 0, δηλαδή το $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)]$ οδηγεί σε απροσδιοριστία $\pm\infty \cdot 0$, τότε μετατρέπουμε το γινόμενο $f(x)g(x)$ σε πηλίκο της μορφής $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ ή $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ ώστε να μετατραπεί η απροσδιοριστία στη μορφή $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$ για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα De L' Hospital.

1.1 Απροσδιοριστές Μορφές - Κανόνες De L' Hospital

- Αν και το νέο όριο οδηγήσει σε απροσδιοριστία, τότε επαναλαμβάνουμε την διαδικασία.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Δηλαδή, έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $(-\infty)0$ και δεν μπορεί να εφαρμοστεί ο κανόνας De L' Hospital. Όμως

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

Δηλαδή, έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{-\infty}{+\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x)'}{(e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

Επομένως, σύμφωνα με τον κανόνα De L' Hospital

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

1.1.7 ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $+\infty - \infty$

Παράδειγμα 5

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.

Λύση

Μεθοδολογία

- Οι συναρτήσεις της μορφής $\frac{f(x)}{g(x)} \pm \frac{h(x)}{k(x)}$ που οδηγούν σε απροσδιοριστίες της μορφής $+\infty - \infty$ πρέπει να μετατρέπονται πρώτα σε ένα κλάσμα ώστε να οδηγήσουν σε απροσδιοριστίες της μορφής $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$ και να εφαρμόσουμε στη συνέχεια τους κανόνες De L' Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{e^x - 1} \right) = +\infty$$

Δηλαδή, έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $+\infty - \infty$ και δεν μπορεί να εφαρμοστεί ο κανόνας De L' Hospital. Όμως

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1 - x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(e^x - 1) = 0$$

Δηλαδή, έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - 1 - x)'}{[x(e^x - 1)]'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1 + xe^x) = 0$$

Δηλαδή, έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - 1)'}{(e^x - 1 + xe^x)'} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{e^x + xe^x + e^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{e^x(2 + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον κανόνα De L' Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Παράδειγμα 6

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - e^{-x})$.

Λύση

Μεθοδολογία

- Οι συναρτήσεις της μορφής $f(x) \pm g(x)$ που οδηγούν σε απροσδιοριστίες της μορφής $+\infty - \infty$ πρέπει να μετατρέπονται πρώτα σε γινόμενο της μορφής $f(x) \left[1 \pm \frac{g(x)}{f(x)} \right]$ ή $g(x) \left[\frac{f(x)}{g(x)} \pm 1 \right]$ ώστε να οδηγήσουν σε απροσδιοριστίες της μορφής $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$ και να εφαρμόσουμε στη συνέχεια τους κανόνες De L' Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

Δηλαδή, έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $+\infty - \infty$ και δεν μπορεί να εφαρμοστεί ο κανόνας De L' Hospital. Όμως

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

Το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2}$ οδηγεί σε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{+\infty}{+\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^{-x})'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-x}}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^{-x}) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$$

Δηλαδή, έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{-\infty}{-\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-e^{-x})'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{2} = +\infty$$

Επομένως, σύμφωνα με τον κανόνα De L' Hospital

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} = +\infty$$

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2}\right) = -\infty$$

Άρα,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - e^{-x}) = \underline{\underline{-\infty}}$$

1.1.8 ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $1^{\pm\infty}$, 0^0 , ∞^0

Παράδειγμα 7

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\eta\mu x}$.

Λύση

Μεθοδολογία

- Οι συναρτήσεις των οποίων οι τύποι είναι της μορφής $f(x)^{g(x)}$ και των οποίων τα όρια οδηγούν σε απροσδιοριστίες της μορφής $1^{+\infty}$, $1^{-\infty}$, 0^0 , $(+\infty)^0$, $(-\infty)^0$ πρέπει να μετατρέπονται πρώτα στη μορφή $e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}$ ώστε να εμφανιστεί στον εκθέτη απροσδιοριστία της μορφής $+\infty \cdot 0$ ή $-\infty \cdot 0$ και να την αντιμετωπίσουμε όπως το παράδειγμα 4.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu x = 0$$

Δηλαδή, έχουμε απροσδιοριστία της μορφής 0^0 και δεν μπορεί να εφαρμοστεί ο κανόνας De L' Hospital. Όμως

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^{\eta\mu x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\eta\mu x \cdot \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta\mu x \cdot \ln x)}$$

Πρέπει να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta\mu x \cdot \ln x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta\mu x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$$

Δηλαδή, έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $0(-\infty)$ και δεν μπορεί να εφαρμοστεί ο κανόνας De L' Hospital. Όμως

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta\mu x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\eta\mu x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\eta\mu x} = +\infty$$

Δηλαδή, έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{-\infty}{+\infty}$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\eta\mu x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\eta\mu^2 x}{x \sigma\upsilon\nu x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\eta\mu^2 x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \sigma\upsilon\nu x) = 0$$

Δηλαδή, έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-\eta\mu^2 x)'}{(x \sigma\upsilon\nu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x - x \eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu x - x \eta\mu x}$$

$$= \frac{-\eta\mu 0}{\sigma\upsilon\nu 0 - 0} = \frac{0}{1} = 0$$

Σύμφωνα με τον κανόνα De L' Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta\mu x \cdot \ln x) = 0$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\eta\mu x} = e^0 = 1$$

Παράδειγμα 8

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} e^x + 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ x \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right) + 2, & \text{αν } 0 < x < 1 \end{cases}$

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στη θέση $x_0 = 0$.

Λύση**Υπενθύμιση**

- Για να είναι συνεχής μια συνάρτηση f στη θέση $x = x_0$, πρέπει να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και να ισχύει
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$
- Για να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, πρέπει να υπάρχουν τα πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ και να ισχύει
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + 1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right) + 2 \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right) + \lim_{x \rightarrow 0^+} 2$$

Πρέπει να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right) = +\infty$$

Δηλαδή, έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $0(+\infty)$ και δεν μπορεί να εφαρμοστεί ο κανόνας De L' Hospital. Όμως

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Δηλαδή, έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{+\infty}{+\infty}$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left[\ln\left(\frac{1}{x} - 1\right) \right]'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x} - 1}{\cancel{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} = 0$$

Σύμφωνα με τον κανόνα De L' Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right) = 0$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + 2 = 2$$

$$\text{Αφού } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

$$f(0) = 2$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x = 0$.

Παράδειγμα 9

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση με τύπο } f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Λύση

Υπενθύμιση

Για να είναι παραγωγίσιμη μια συνάρτηση f στη θέση $x = x_0$, πρέπει :

- να είναι συνεχής στη θέση αυτή και επιπλέον
- να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

$$f(0) = 1$$

$$\text{Δηλαδή, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Επομένως η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\eta\mu x}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x - x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

Δηλαδή, έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\eta\mu x - x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sigma\upsilon\nu x - 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2x) = 0$$

Δηλαδή, έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$

1.1 Απροσδιορίστες Μορφές - Κανόνες De L' Hospital

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - 1)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\eta\mu x}{2} = 0 \in \mathbb{R}$$

Σύμφωνα με τον κανόνα De L' Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \in \mathbb{R}$$

Επομένως, η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

1.1.9 ΕΥΡΕΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

Παράδειγμα 10

Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x - e^{-x} + \beta}{\beta x - \eta\mu x} = -2$ να βρεθούν οι τιμές των a και β , όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$.

Λύση

$$\lim_{x \rightarrow 0} (ae^x - e^{-x} + \beta) = a - 1 + \beta$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\beta x - \eta\mu x) = 0$$

Αν $a - 1 + \beta \neq 0$, τότε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x - e^{-x} + \beta}{\beta x - \eta\mu x}$ δεν μπορεί να είναι -2 .

$$\text{Άρα, θα πρέπει } a - 1 + \beta = 0 \Leftrightarrow a + \beta = 1 \quad (1)$$

Δηλαδή, έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(ae^x - e^{-x} + \beta)'}{(\beta x - \eta\mu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x + e^{-x}}{\beta - \sigma\upsilon\nu x} = \frac{a + 1}{\beta - 1}$$

Σύμφωνα με τον κανόνα De L' Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x - e^{-x} + \beta}{\beta x - \eta\mu x} = \frac{a + 1}{\beta - 1}$$

Επομένως,

$$\frac{a + 1}{\beta - 1} = -2 \Leftrightarrow a + 1 = -2\beta + 2 \Leftrightarrow a + 2\beta = 1 \quad (2)$$

$$(1) \quad a + \beta = 1$$

$$(2) \quad a + 2\beta = 1 -$$

$$-\beta = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\beta = 0}} \Leftrightarrow a + 0 = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = 1}}$$

1.1.10 ΟΡΙΑ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΑΓΝΩΣΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Παράδειγμα 11

Αν f είναι μια συνάρτηση με συνεχή πρώτη και δεύτερη παράγωγο, της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται του άξονα των τετμημένων στην αρχή των

αξόνων και $f''(0) = 2015$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x + f(x)}{f(x) + \ln(x+1) - x}$.

Λύση

• Αφού η C_f περνά από την αρχή των αξόνων, τότε $f(0) = 0$.

- Αφού η C_f εφάπτεται του άξονα των τετμημένων στο $(0,0)$, τότε σ' αυτό το σημείο η κλίση της εφαπτομένης είναι 0. Άρα, $f'(0) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\eta\mu^2 x + f(x)] = \eta\mu^2 0 + f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + \ln(x+1) - x] = f(0) + \ln 1 - 0 = 0$$

Δηλαδή, έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\eta\mu^2 x + f(x))'}{(f(x) + \ln(x+1) - x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\eta\mu x \cos x + f'(x)}{f'(x) + \frac{1}{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x + f'(x)}{f'(x) + \frac{1}{x+1} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu 2x + f'(x)) = \eta\mu 0 + f'(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(f'(x) + \frac{1}{x+1} - 1 \right) = f'(0) + 1 - 1 = 0$$

Δηλαδή, έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\eta\mu 2x + f'(x))'}{\left(f'(x) + \frac{1}{x+1} - 1 \right)'} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x + f''(x)}{f''(x) - \frac{1}{(x+1)^2}} = \frac{2 \cos 0 + f''(0)}{f''(0) - 1} = \frac{2 + 2015}{2015 - 1} \\ &= \frac{2017}{2014} \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον κανόνα De L' Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x + f(x)}{f(x) + \ln(x+1) - x} = \underline{\underline{\frac{2017}{2014}}}$$

Παράδειγμα 12

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία έχει συνεχή πρώτη και δεύτερη παράγωγο και ικανοποιεί τη σχέση $f^5(x) + f(x) = e^x + e^{-x} - 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x \eta\mu x} = 1.$$

Λύση

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\text{Αφού } f^5(x) + f(x) = e^x + e^{-x} - 2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$f^5(0) + f(0) = e^0 + e^0 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad f(0)[f^4(0) + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f(0) = 0 \quad \text{ή} \quad f^4(0) = -1 \quad \text{ΑΤΟΠΟ}$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \eta\mu x) = 0$$

Δηλαδή, έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x))'}{(x \eta \mu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x \sigma \upsilon \nu x + \eta \mu x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$$

$$(1) \Rightarrow 5f^4(x)f'(x) + f'(x) = e^x - e^{-x} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow 5f^4(0)f'(0) + f'(0) = e^0 - e^0$$

$$\Leftrightarrow f'(0) = 0$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \sigma \upsilon \nu x + \eta \mu x) = 0$$

Δηλαδή έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f'(x))'}{(x \sigma \upsilon \nu x + \eta \mu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{-x \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x + \sigma \upsilon \nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{-x \eta \mu x + 2\sigma \upsilon \nu x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = f''(0)$$

$$(2) \Rightarrow 20f^3(x)[f'(x)]^2 + 5f^4(x)f''(x) + f''(x) = e^x + e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow 20f^3(0)[f'(0)]^2 + 5f^4(0)f''(0) + f''(0) = e^0 + e^0$$

$$\Leftrightarrow f''(0) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x \eta \mu x + 2\sigma \upsilon \nu x) = 2$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{-x \eta \mu x + 2\sigma \upsilon \nu x} = \frac{2}{2} = 1$$

Σύμφωνα με τον κανόνα De L' Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x \eta \mu x} = 1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.1Α

Να βρεθούν τα όρια 1 – 46 :

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1)}{(x-2)}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1 - \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x + \ln x}{x^3 - 3x + 2}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\eta \mu x - x \cdot \sigma \upsilon \nu x}{\eta \mu 2x}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sigma \upsilon \nu x - 1)}{x^2 + \eta \mu^2 x}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma \upsilon \nu x}{x \eta \mu x}$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \varepsilon \varphi x}{1 - \sigma \varphi x}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\eta \mu^2 x - x^2}$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - \eta \mu x}{x^2}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + \eta\mu x - 1}{\ln(x+1)}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x + 2}{x^2 - 1}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2e^x - 1)}{3x + 2}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 - \sigma\upsilon\nu x)}{\ln x}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{e^{2x} - 1}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \ln x^4}{e^{-x}}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{2x} + e^{-2x})}{x}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x + \eta\mu \frac{1}{x}}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + \eta\mu \theta}{e^{2x} + 3x - 1}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$$

$$22. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3)e^{-x}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{\frac{1}{x^2}}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln 2x)$$

$$28. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \eta\mu \frac{a}{x} \right)$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^v \ln(vx)), v \in \mathbb{N}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 e^{\frac{1}{x^2}}$$

$$31. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln x$$

$$32. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)[\ln(x+1) - \ln x]$$

$$33. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} \right)$$

$$34. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\eta\mu x} \right)$$

$$35. \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right)$$

$$36. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x + \eta\mu x} - \frac{1}{x} \right)$$

$$37. \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{3x} - x)$$

$$38. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \ln^2 x)$$

$$39. \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \ln 2x)$$

$$40. \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} + x - \ln x)$$

$$41. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$$

$$42. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x$$

$$43. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{ax}$$

$$44. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\varepsilon\varphi x}$$

$$45. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta\mu x)^x$$

$$46. \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} (\eta\mu x)^{\varepsilon\varphi x}$$

47. $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \left[\sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right]^{\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}}$

48. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\sigma \varphi x}$

49. $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}$

50. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

51. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{x^2}, & \text{av } x < 0 \\ \frac{3x^2 - x + 9}{x^2 + 2}, & \text{av } x \geq 0 \end{cases}$

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

52. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \eta \mu x}{x \eta \mu x}, & \text{av } x < 0 \\ \ln(1 - x) + x^2, & \text{av } x \geq 0 \end{cases}$

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

53. Να δείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + x + 1}, & \text{av } x \geq 0 \\ \frac{2x - 2\eta \mu x}{x^2}, & \text{av } x < 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

54. Να δείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sin(2x)}{x^2 - \pi^2}, & \text{av } x \neq \pi \\ \eta \mu(x - \pi), & \text{av } x = \pi \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $x_0 = \pi$.

55. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 1}{x}, & \text{av } x \neq 0 \\ 2, & \text{av } x = 0 \end{cases}$$

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

56. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x - 1}, & \text{av } x \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \\ 1, & \text{av } x = 1 \end{cases}$$

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

57. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = e^{|x-1|}$.

Να ελέγξετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

58. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + 1, & \text{αν } x < 1 \\ 3x - x^2, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

59. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς $a \in \mathbb{R}$ αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \eta\mu(ax) + x}{\sigma\upsilon\nu(ax) + 2x - 1} = 2$.

60. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς $\kappa \in \mathbb{R}$ αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x + \eta\mu(\kappa x)}{1 + 3x - \sigma\upsilon\nu(\kappa x)} = 1$.

61. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς $a \in \mathbb{R}$ αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} + \eta\mu(2x) - 1}{\eta\mu x + x} = 3$.

62. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς $a \in \mathbb{R}$ αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a \ln x - e^x + ex}{x^3 - 1} = 1$.

63. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(a \sigma\upsilon\nu x - 2) + \beta \eta\mu x}{x^3} = -1$, να βρεθούν οι τιμές των σταθερών a και β , όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$.

64. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sigma\upsilon\nu x + \beta x \eta\mu x + e^{x^2}}{x^2} = \frac{5}{2}$, να βρεθούν οι τιμές των σταθερών a και β , όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$.

65. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^{\sigma\upsilon\nu x} + \beta x - ae}{\eta\mu(2x) - x^2 - 2x} = e$, να βρεθούν οι τιμές των σταθερών a και β , όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$.

66. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a + \beta x + \ln(x-1)}{\eta\mu(x-2)} = -1$, να βρεθούν οι τιμές των σταθερών a και β , όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$.

67. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f εφάπτεται με τον άξονα των τετμημένων στο $(0,0)$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 3$ και η $f'''(x)$ είναι συνεχής στο $(0,0)$, να βρεθεί το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta\mu x - x}{x^3}.$$

68. Αν f είναι συνάρτηση με συνεχή πρώτη, δεύτερη και τρίτη παράγωγο και για την οποία ισχύουν :

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f''(0) = 1 \quad \text{και} \quad f'''(x) \in \mathbb{R},$$

να βρεθεί το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x)}{\eta\mu x - x}.$$

1.1 Απροσδιόριστες Μορφές – Κανόνες De L' Hospital

69. Αν f μια συνάρτηση με συνεχή πρώτη και δεύτερη παράγωγο και για την οποία ισχύουν:

$$f(0) = f'(0) = 0, f''(0) = 4,$$

να βρεθεί το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu f(x) - x^2}{e^{x^2} - \eta\mu x + x + 1}.$$

70. Αν f μια συνάρτηση με συνεχή πρώτη και δεύτερη παράγωγο και για την οποία ισχύουν:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 1,$$

να βρεθεί το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) - e^x - x}{e^{\eta\mu x} - x^2 - x - 1}.$$

71. Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή πρώτη και δεύτερη παράγωγο στο $x = 0$

και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \eta\mu^2 2x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{\sqrt{1+x^2} - 1} = 2$, να βρεθεί η τιμή $f(0)$.

72. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με συνεχή πρώτη και δεύτερη παράγωγο στη

θέση $x = 2$ και τέτοια ώστε να είναι $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)f(x) + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{4}}{(x-2)^2} = 3$.

Να προσδιοριστούν οι τιμές $f(2)$ και $f'(2)$.

73. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία έχει συνεχή πρώτη και δεύτερη παράγωγο και ικανοποιεί τη σχέση

$$f^3(x) + 2f(x) = x(x - \eta\mu x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x^2}{e^{2x} + f(x) - 2x - 1} = \frac{1}{2}.$$

74. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία έχει συνεχή πρώτη και δεύτερη παράγωγο και ικανοποιεί τη σχέση

$$x + f(x) + 3f^5(x) = xe^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sigma\upsilon\nu x - 1}{f(x)} = \frac{1}{4}.$$

75. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία έχει συνεχή πρώτη και δεύτερη παράγωγο και η οποία έχει την ιδιότητα

$$f^3(x) + 2f(x) = 2x(\sigma\upsilon\nu x - 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x)}{x^2} = 0.$$

76. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία έχει συνεχή πρώτη και δεύτερη παραγώγο και η οποία έχει την ιδιότητα

$$f^5(x) + 3f(x) = (x-1)e^x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να δειχθεί ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu f(x)}{x^2} = \frac{1}{6}.$$

77. Η συγκέντρωση ενός φαρμάκου στον οργανισμό ενός ασθενή t ώρες μετά τη λήψη του φαρμάκου δίδεται από τη συνάρτηση

$$\sigma(t) = 1000te^{-\frac{t}{100}}.$$

Να αποδείξετε ότι μετά από πολλές ώρες η συγκέντρωση του φαρμάκου γίνεται αμελητέα.

78. Η θερμοκρασία σε $^{\circ}\text{C}$ ενός ασθενούς σε συνάρτηση με τον χρόνο που μεσολαβεί από την χορήγηση σε αυτόν ενός αντιπυρετικού δίδεται από τη σχέση

$$\theta(t) = 2e^{-2t}(3t+1) + 37.$$

Να δείξετε ότι με την πάροδο του χρόνου η θερμοκρασία του ασθενούς θα γίνει περίπου 37°C .

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1.1Α

1. 1	2. $-\infty$	3. $\frac{1}{2}$	4. $-\frac{1}{6}$
5. $\frac{1}{2}$	6. 0	7. $\frac{1}{2}$	8. -1
9. $-\frac{1}{4}$	10. $-\frac{1}{2}$	11. 2	12. 1
13. 0	14. $\frac{1}{3}$	15. 2	16. 0
17. 0	18. 2	19. $-\infty$	20. 0
21. 0	22. 0	23. $+\infty$	24. $-\infty$
25. 1	26. 0	27. 0	28. a
29. 0	30. $+\infty$	31. 0	32. 1
33. $-\infty$	34. 0	35. $-\frac{1}{2}$	36. $-\infty$
37. $+\infty$	38. $+\infty$	39. $+\infty$	40. $+\infty$
41. e	42. e^a	43. 1	44. 1
45. 1	46. 1	47. 1	48. 1
49. e	50. 1	57. Συνεχής αλλά όχι παραγωγίστη	
59. 3	60. 2	61. 4	62. 3
71. $\frac{3}{8}$	72. $f(2) = \frac{\pi}{4}, f'(2) = 3$		