ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΝ ΓΥΜΝΑΣΙΟΝ ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2022-2023

ΕΝΟΤΗΤΑ 8: ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1. Να σχεδιάσετε πρόχειρα τη γραφική παράσταση των καμπυλών (χωρίς πίνακα τιμών)

   $\alpha) y = x^2$ $\beta) y = 2x^2$ $\gamma) y = -3x^2$ $\delta) y = x^2 - 1$

   $\varepsilon) y = -x^2 + 2$ $\sigma\tau) y = (x-1)^2$

   $\zeta) y = (x-1)^2$ $\eta) y = -(x+1)^2 - 3$

2. Να βρείτε τον άξονα συμμετρίας και το ακρότατο σε κάθε μια από τις πιο πάνω συναρτήσεις.

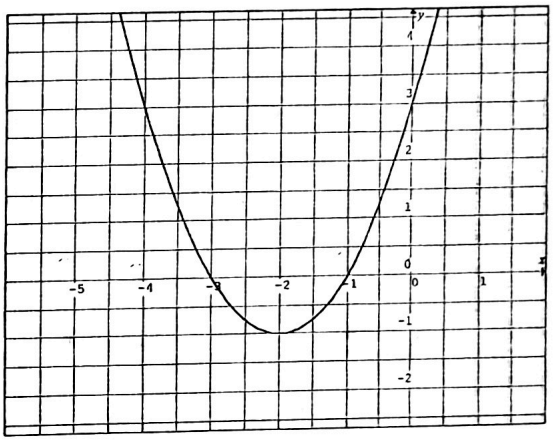
3. Για τις συναρτήσεις που ακολουθούν να βρείτε: (i) Τον άξονα συμμετρίας και την μέγιστη ή ελάχιστη τιμή του ψ. (ii) Τα σημεία τομής με τους άξονες ψψ΄ και χχ΄.

   α) $\psi = \chi^2 - 2\chi - 3$ β) $\psi = -\chi^2 + 4$ γ) $\psi = (\chi-4)^2 - 1$

   δ) $\psi = -2(\chi+1)^2 + 2$ ε) $\psi = 9\chi^2 - 6\chi + 1$ στ) $\psi = 2\chi^2 + 3\chi + 7$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta\chi+\gamma$. Από το σχήμα να βρείτε:

   α) το πεδίο τιμών της συνάρτησης
   β) το πρόσημο του α
   γ) την τιμή του γ
   δ) τον άξονα συμμετρίας της
   ε) τις συντεταγμένες του ακρότατου σημείου της
   στ) τις λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta\chi+\gamma=0$
   ζ) την τιμή του β αν α=1
   η) τις τιμές των f(-4), f(-1) και f(-2).



5. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{(x^2-x-2)(x-2)(x^2+9)}{6x-x^2} \geq 0.$

6. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{(x+1)^2 \cdot (x+2)}{x^2-5x+6} \geq 0.$

7. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \kappa x + \kappa + 1 = 0$ με ρίζες x_1, x_2.

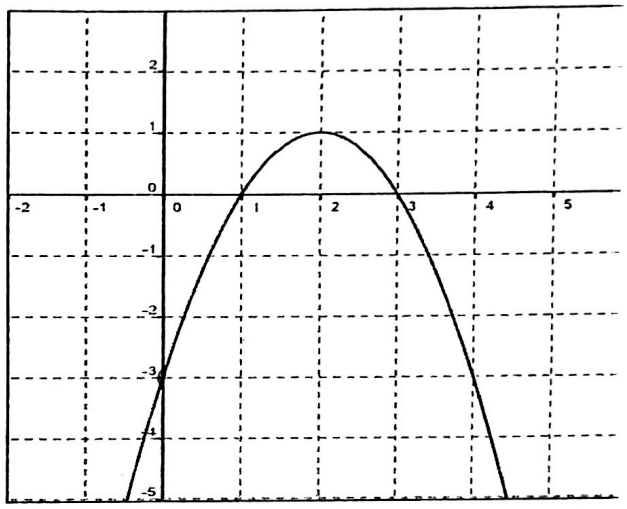
   α) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $x_1 + x_2$ και $x_1 . x_2$.
   β) Να δείξετε ότι: $(1 - {x_1}^2)(1 - {x_2}^2) = 4(\kappa + 1)$
   γ) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες $\rho_1 = \frac{1}{x_1}$ και $\rho_2 = \frac{1}{x_2}$

8. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - \sqrt{5}x + 2 + \sqrt{5} = 0$, χωρίς να τη λύσετε:

α) Να δείξετε ότι: $\frac{{x_1}^2+{x_2}^2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{1-2\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$

β) Να μετατρέψετε το κλάσμα του μέρους (α) σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή, δίνοντας την απάντησή σας στην πιο απλή, μορφή.

9. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.



Να βρείτε :

α) το πεδίο ορισμού της $f(x)$

β) το πεδίο τιμών της $f(x)$

γ) το πρόσημο του α

δ) τις ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

ε) το πρόσημο της διακρίνουσας της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

στ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας

ζ) την τιμή του γ

η) το είδος του ακρότατου (μέγιστο ή ελάχιστο) και τις συντεταγμένες του

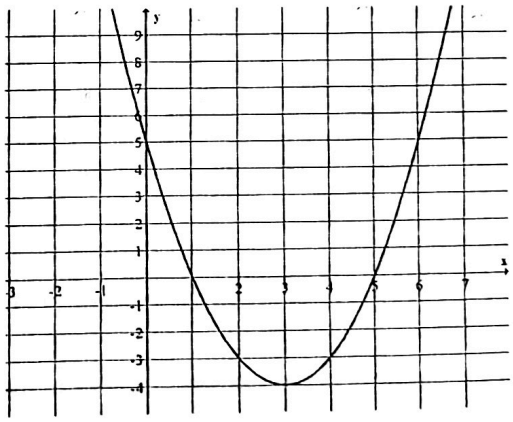
θ) τις τιμές των α, β και γ.

ι) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 0$.

ια) την τιμή $f(4)$ και το πρόσημο του $f(-100)$

ιβ) την εξίσωση της παραβολής στη μορφή $f(x) = a(x+\kappa)^2 + \lambda$

10. Δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$. Να βρείτε:



α) το πεδίο τιμών της συνάρτησης.

β) Τις λύσεις χ_1 και χ_2 της εξίσωσης $f(x) = 0$.

γ) Τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0$.

δ) Την τιμή των S και P.

ε) Την τιμή της παράστασης: $\frac{3\gamma - 4\beta}{\alpha}$

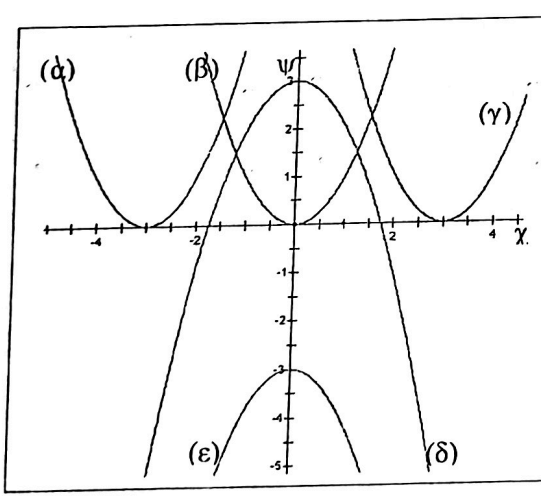
11. Να χαρακτηρίσετε ορθή ή λάθος καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις:

ΠΡΟΤΑΣΗ		
Η παραβολή $f(x) = 2x^2$ έχει μέγιστο.	ΟΡΘΗ	ΛΑΘΟΣ
Οι συναρτήσεις $y = x^2 + 6x$ και $y = -(x+3)^2 + 9$ έχουν την ίδια κορυφή.	ΟΡΘΗ	ΛΑΘΟΣ
Η παραβολή $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ έχει άξονα συμμετρίας τη $x = 1$.	ΟΡΘΗ	ΛΑΘΟΣ
Όταν η $f(x) = x^2$ μετατοπίζεται 2 μονάδες αριστερά τότε γίνεται $g(x) = (x+2)^2$.	ΟΡΘΗ	ΛΑΘΟΣ
Όταν η $f(x) = -x^2$ μετατοπίζεται 3 μονάδες αριστερά και 2 μονάδες κάτω τότε γίνεται $g(x) = -(x+3)^2 - 2$.	ΟΡΘΗ	ΛΑΘΟΣ

12. Σε κάθε στοιχείο της στήλης Α να αντιστοιχίσετε ένα μόνο στοιχείο που αναγράφεται στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	**ΚΟΡΥΦΗ και ΠΕΔΙΟ ΤΙΜΩΝ**
$y = (x+2)^2 + 1$	$K(2,-1)$ $με$ $Π.Τ.$ $(-\infty, 1]$
$y = -(x-2)^2 + 1$	$K(2,-1)$ $με$ $Π.Τ.$ $(-\infty, -1]$
$y = x^2 - 4x + 3$	$K(-2,1)$ $με$ $Π.Τ.$ $[1, \infty)$
$y = -x^2 + 4x - 5$	$K(2,1)$ $με$ $Π.Τ.$ $(-\infty, 1]$
	$K(2,-1)$ $με$ $Π.Τ.$ $[-1, \infty)$

13. Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας κάθε γραφική παράσταση με τον σωστό τύπο:



i $\psi = \chi^2$
ii $\psi = (\chi+3)^2$
iii $\psi = -\chi^2+3$
iv $\psi = -\chi^2 -3$
v $\psi = -(\chi-3)^2$
vi $\psi = (\chi-3)^2$

Γραφική παράσταση	**Τύπος συνάρτησης**
α	
β	
γ	
δ	
ε	

14. Δίνεται η παραβολή $y = x^2 + (\mu+3)x + \kappa + 4$. Να βρείτε τους αριθμούς μ και κ , ώστε η παραβολή να έχει κορυφή $(3, -2)$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2(\mu-2)x + \mu - 6$, $\mu \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή ή τις τιμές του μ, ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει μέγιστη τιμή - 2.

16. Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in R$ ώστε η συνάρτηση $\phi(\chi) = \chi^2 - 2\chi + \lambda$ να είναι πάντοτε θετική.

17. Να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων για τις διάφορες τιμές του $x \in R$.

α) $3x^2 + 5x - 2$ β) $-4x^2 + 20x - 25$ γ) $3x^2 - x + 2$

18. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $\chi^2 - 7\chi + 10 > 0$ β) $2\chi^2 < \chi - 1$ γ) $\chi^2 - 10\chi + 25 \leq 0$ δ) $\chi^3 - 9\chi < 0$

ε) $2\chi^2(\chi+2)(\chi^2 - 5\chi + 6) \leq 0$ ζ) $\frac{x^2 + 3\chi - 4}{\chi(\chi+3)} \leq 0$ η) $\frac{7x^2}{\chi^3 + 3\chi^2} \leq 0$

θ) $\frac{x^2}{2x-1} \leq 1$ ι) $\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x-3} \geq 1$ κ) $\frac{x^2 + 11}{\chi + 1} \geq 5$

19. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \Re$ ώστε οι παρακάτω εξισώσεις να έχουν ρίζες πραγματικές και άνισες:

α) $(\lambda+3)\chi^2 - 4\lambda\chi + 4 = 0$ β) $\chi^2 - (\lambda+2)\chi + 9 = 0$

20. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \Re$ οι παρακάτω εξισώσεις δεν έχουν πραγματικές ρίζες:

α) $\chi^2 + \mu\chi + \mu + 3 = 0$ β) $(\mu+3)\chi^2 - 2\mu\chi + 4 = 0$

21. Αν χ_1 , χ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\chi^2 - 2\chi - 5 = 0$, να υπολογίσετε χωρίς να λύσετε την εξίσωση, τις τιμές των παραστάσεων:

α) $5\chi_1 + 2\chi_1\chi_2 + 5\chi_2$ β) $3\chi_1\chi_2^2 + 3\chi_1^2\chi_2$ γ) $(\chi_1 - \chi_2)^2$

δ) $\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2}$ ε) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ στ) $4\chi_1\chi_2^3 + 4\chi_1^3\chi_2$ ζ) $\frac{1}{2\chi_1 + 1} + \frac{1}{2\chi_2 + 1}$

22. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda^2 - 4 = 0$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in R$ για τις οποίες η εξίσωση έχει :

α) Ρίζα τον αριθμό –1.

β) Ρίζες πραγματικές και ίσες.

γ) Ρίζες αντίθετες.

δ) Ρίζες αντίστροφες.

ε) Ρίζες ετερόσημες.

στ) Ρίζες για τις οποίες ισχύει $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \geq 2$.

ζ) Ρίζες με άθροισμα διπλάσιο του γινομένου τους.

23. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης : $f(x) = \sqrt{\frac{(x^2-2x-3)(x^2-9)}{1-x}}$

24. Να βρείτε εξισώσεις που έχουν ρίζες τα ζεύγη των αριθμών:

α) $-4, 3$ β) $2-\sqrt{5}$, $2+\sqrt{5}$ γ) $\frac{\kappa}{\lambda}, \frac{\lambda}{\kappa}$ με $\kappa \cdot \lambda \neq 0$

25. Αν χ_1, χ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $2\chi^2 + 3\chi + 5 = 0$, να σχηματίσετε εξίσωση β' βαθμού που να έχει ρίζες τις:

α) $\rho_1 = 2\chi_1 - 1$ και $\rho_2 = 2\chi_2 - 1$ β) $\rho_1 = \frac{2}{x_1}$ και $\rho_2 = \frac{2}{x_2}$

26. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα: (α) $\frac{x^2+x-6}{2x^2+7x+3}$ (β) $\frac{2x^3+x^2-3x}{x^3-3x^2+2x}$

27. Να λύσετε τα συστήματα: (α) $\begin{cases} \chi + 2\psi = 4 \\ \chi\psi = -6 \end{cases}$ (β) $\begin{cases} \chi + 3\psi = 4 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases}$

28. Δίδεται η εξίσωση $2\alpha\chi^2 + (2\alpha - \beta)\chi - \beta = 0$, $\alpha \neq 0$. Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και ίσες, και ισχύει η σχέση $S + P = \alpha + 3$, να υπολογίσετε τις τιμές των α και β.

29. Το άθροισμα των δύο καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι 10cm. Να βρείτε τα μήκη που πρέπει να έχουν οι πλευρές του τριγώνου ώστε το εμβαδόν του τριγώνου να είναι μέγιστο. Στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού.

30. Δίνεται η εξίσωση: $\chi^2 - 2(\mu+3)\chi + \mu^2 + 6\mu - 5 = 0$ με ρίζες ρ_1 και ρ_2. Να αποδείξετε ότι η διαφορά $\rho_1 - \rho_2$ δεν εξαρτάται από το μ.

31. Αν η μια ρίζα της εξίσωσης $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ είναι διπλάσια από την άλλη να δείξετε ότι: α) $2\beta^2 = 9\alpha\gamma$ (β) $\Delta = \frac{\alpha\gamma}{2}$