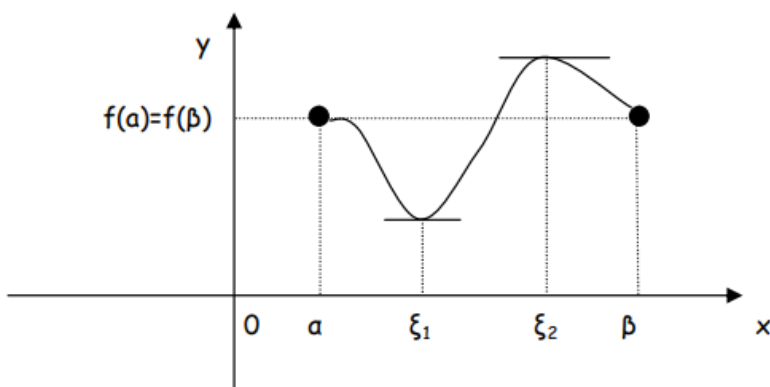


Ασκήσεις στο Θεώρημα Μέσης Τιμής και Θεώρημα του Rolle.

Θεώρημα Rolle

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β) και ισχύει ότι $f(a) = f(\beta)$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

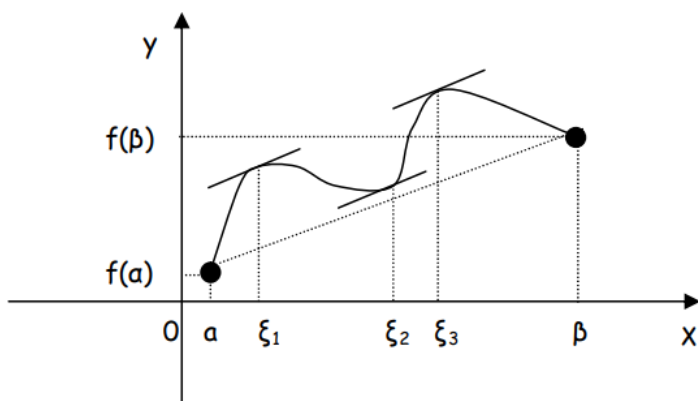


Θεώρημα Μέσης Τιμής (του Διαφορικού Λογισμού)

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β) , τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}.$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία AB , όπου $A(a, f(a))$, $B(\beta, f(\beta))$.





ΜΕΘΟΔΟΣ 1^η

Όταν ζητούνται κάποιες παράμετροι ώστε να ισχύει το Θεώρημα Rolle για μια δίκλαδη συνάρτηση f στο διάστημα $[a, b]$, της οποίας ο τύπος αλλάζει στο σημείο $x_0 \in (a, b)$, βρίσκουμε τις παραμέτρους αυτές από τις ισότητες:

- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- $f(a) = f(b)$.

Αντίστοιχα, για το Θεώρημα Μέσης Τιμής βρίσκουμε τις παραμέτρους από τις ισότητες:

- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Άσκηση:

Να υπολογιστούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + 2x + \frac{5}{3} & x < 1 \\ ax^2 + x + \beta & x \geq 1 \end{cases}$$

στο διάστημα $[0, 2]$. Στη συνέχεια να βρεθούν όλα τα $\xi \in (0, 2)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$



ΜΕΘΟΔΟΣ 2^η

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία το πολύ ρίζα ή δύο το πολύ ρίζες κ. λ. π., εργαζόμαστε ως εξής: Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει μία παραπάνω ρίζα. Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση f στα διαστήματα μεταξύ των ριζών που υποθέτουμε ότι έχει και καταλήγουμε σε άτοπο.

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα Δ , αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα (πιθανότατα με Θεώρημα Bolzano) και μια το πολύ ρίζα σύμφωνα με τα παραπάνω.

Άσκηση 1:

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^3 = 3x - 1$ έχει μια μοναδική λύση στο διάστημα $(0,1)$.

Άσκηση 2:

Αν $\alpha \neq 0$, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\chi^4 + \alpha\chi^3 + \alpha^2\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ έχει **το πολύ δύο πραγματικές ρίζες**.



ΜΕΘΟΔΟΣ 3^η

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα σ' ένα διάστημα Δ , εργαζόμαστε ως εξής: Εφαρμόζουμε Θεώρημα Bolzano για την f στο Δ . Αν αυτό δεν εφαρμόζεται, τότε εφαρμόζουμε Θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση g στο Δ , όπου $g'(x) = f(x)$ (η g λέγεται αρχική συνάρτηση της f).

Άσκηση 3:

Αν $4\alpha + 6\beta + 12\gamma = -3$ να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει τουλάχιστο μια λύση στο διάστημα $(0,1)$.



ΜΕΘΟΔΟΣ 4^η

Αν ζητείται να αποδείξουμε μια ισότητα που περιέχει $f(\xi)$, $f'(\xi)$ και μια παράσταση του $\xi \in (a, b)$, τότε στη θέση του ξ θέτουμε το x και προσπαθούμε να εμφανίσουμε την αρχική κατάλληλης συνάρτησης. Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την αρχική αυτή συνάρτηση.

Πρέπει σ' αυτό το σημείο να δώσουμε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης:

Η συνάρτηση g λέγεται αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα Δ , όταν είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $g'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Άσκηση 4:

Δίνεται η συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) για την οποία ισχύει ότι $f(a) - f(b) = a^2 - b^2$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστο ένα $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 2\xi$

Άσκηση 5:

Έστω δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g ορισμένες στο διάστημα $[0,1]$ τέτοιες ώστε $f(x) \cdot g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ και $f(0) = g(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστο ένα $\xi \in$

$(0,1)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = 0$



ΜΕΘΟΔΟΣ 5^η

Για να αποδείξουμε μία ανίσωση της μορφής $g(a, b) < f(b) - f(a) < h(a, b)$, εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[a, b]$.

Άσκηση 6:

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να αποδειχθεί ότι $(\beta - \alpha)3^\alpha \ln(3) < 3^\beta - 3^\alpha < (\beta - \alpha)3^\beta \ln(3)$



ΜΕΘΟΔΟΣ 6^η

Σε ασκήσεις που θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη

στον άξονα $x'x$,
εφαρμόζουμε Θεώρημα Rolle για
την f στο $[a, b]$.

σε μη οριζόντια ευθεία,
εφαρμόζουμε Θεώρημα Μέσης Τιμής
για την f στο $[a, b]$.

Άσκηση 7:

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ με $f(b) = 3a$ και $f(a) = 3b$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστο ένα $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y + 3x - 1 = 0$

Άσκηση 8:

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ για την οποία ισχύουν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $\ln(f(\beta)) - \ln(f(\alpha)) = \beta - \alpha$. Αν $g(x) = f(x)e^{-x}$ να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστο ένα σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον άξονα των τετμημένων ($x'x$).

Επιπλέον ασκήσεις:

Άσκηση 10:

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $1 \leq f'(x) \leq 2$ να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $x \leq f(x) \leq 2x$

Άσκηση 11:

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(-1) = -2$ και $f(1) = 2$. Να αποδειχθεί ότι

υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-1,1)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια ώστε $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 1$

Άσκηση 12:

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [a, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) \leq 3$ για κάθε $x \in [a, 1]$ ότι $f(a) = (a + 1)^3$ και $f(1) = 8$

α) Να βρείτε τη τιμή του a όπου $a \in \mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστο ένα ξ τέτοιο ώστε $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 1 - 2\xi$