

1.5 Διάταξη πραγματικών αριθμών

1. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

| | | |
|------|--|---------------|
| (α) | Αν $a > 3$ και $\beta > 2$, τότε $a\beta > 6$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (β) | Αν $\kappa > 5$ και $\lambda > -2$, τότε $\kappa + \lambda > 1$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (γ) | Αν $a > -3$, τότε $a^2 > 9$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (δ) | Αν $\frac{a}{\beta} > 3$, τότε $a > 3\beta$, $a, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (ε) | Αν $a - \beta > 0$ και $a, \beta \in \mathbb{R}^+$, τότε $a^2 - \beta^2 > 0$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (στ) | Αν $a < \beta < 0$, τότε $a^2 < \beta^2$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (ζ) | Αν $a^2 > a\beta$, τότε $a > \beta$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (η) | Αν $a > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $a - \gamma > \beta - \delta$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (θ) | Αν $x > y$, τότε $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$ ($x, y \geq 0, n$ φυσικός). | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (ι) | Αν $0 < a < \beta$, τότε $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{\beta}$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |

2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

(α) Αν $a, \beta \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $\beta > 0$, τότε:

A. $-a\beta > 0$ **B.** $a - \beta > 0$ **Γ.** $a\beta < 0$ **Δ.** $\frac{a}{\beta} > 0$

(β) Αν $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq -1$, $y \geq 8$, τότε:

A. $xy \leq 8$ **B.** $xy \geq -8$ **Γ.** $x + y \geq 7$ **Δ.** $x - y \leq -9$

(γ) Αν $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $y \in \mathbb{R}$, με $x \geq 4$ και $y \leq -5$, τότε:

A. $xy < 0$ **B.** $\frac{1}{x} \geq 4$ **Γ.** $x + y \leq -1$ **Δ.** $x - y \leq 9$

(δ) Αν $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $y \in \mathbb{R}$, με $x \geq 4$ και $y \leq -5$, τότε:

A. $x^2 \leq 9$ **B.** $y^2 \leq 9$ **Γ.** $x - y \leq 6$ **Δ.** $\frac{1}{x} > 0$

3. Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο $<$, $=$, $>$, ώστε οι σχέσεις που θα προκύψουν να είναι αληθείς και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας:

(α) $24^{\frac{3}{5}} \dots \dots 15^{\frac{3}{5}}$ (β) $17^{-\frac{3}{5}} \dots \dots 15^{-\frac{3}{5}}$ (γ) $0,7^{\frac{5}{7}} \dots \dots 0,4^{\frac{5}{7}}$

(δ) $0,3^{-\frac{3}{5}} \dots \dots 0,5^{-\frac{3}{5}}$ (ε) $-\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{11}{2}} \dots \dots -\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{11}{2}}$

4. Αν $a = \sqrt[6]{10}$, $\beta = \sqrt{2}$ και $\gamma = \sqrt[3]{3}$, τότε:

A. $a < \beta < \gamma$ **B.** $a < \gamma < \beta$ **Γ.** $\gamma < a < \beta$ **Δ.** $\beta < \gamma < a$ **Ε.** $\beta < a < \gamma$

5. Να συγκρίνετε τους πιο κάτω αριθμούς, αν ισχύει ότι a, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, με $a < \beta$:

(α) $A = 10a - 3$, $B = 10\beta - 3$

(β) $\Gamma = 4 - 3a$, $\Delta = 4 - 3\beta$

(γ) $E = 2a^2 + 3$, $Z = 2\beta^2 + 3$

(δ) $H = \frac{5}{a} - 1$, $\Theta = \frac{5}{\beta} - 1$

(ε) $K = \frac{1}{\sqrt{a}}$, $\Lambda = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$

6. Αν $0 < a < 1$, τότε να αποδείξετε ότι $a^2 < a$.

7. Αν x, y είναι θετικοί ακέραιοι και $x < y$, τότε να διατάξετε τους αριθμούς

$$1, \frac{x}{y}, \frac{y}{x}$$

από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο.

8. Αν $1 < x < 3$ και $2 < y < 5$, τότε να αποδείξετε ότι:

(α) $3 < x + y < 8$

(β) $4 < 2x + y < 11$

(γ) $-4 < x - y < 1$

9. Αν $x > 2$ και $y > 3$, να αποδείξετε ότι:

(α) $xy > 6$

(β) $(x - 2)(y - 3) > 0$

10. Αν $x > 3$ και $y < 2$, τότε να αποδείξετε ότι $(x - 3)(y - 2) < 0$. Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι $xy + 6 < 2x + 3y$.

11. Αν $1 < x < 2$ και $-2 < y < -1$, τότε να βρείτε το μικρότερο διάστημα στο οποίο βρίσκονται οι πραγματικοί αριθμοί:

$$2x + 3y, \quad xy, \quad \frac{x}{y}, \quad -\frac{2x}{3y}$$

12. Ένα ορθογώνιο οικοπέδο έχει 32 m μήκος και 20 m πλάτος. Αν το λάθος στις μετρήσεις δεν ξεπερνά τα 10 cm για κάθε διάσταση, τότε να υπολογίσετε:

(α) μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η περίμετρος του οικοπέδου

(β) μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται το εμβαδόν του οικοπέδου.

13. Να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα, για να δείξετε ότι δεν ισχύουν οι πιο κάτω προτάσεις:

(α) Αν $a < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε ισχύει:

$$a - \gamma < \beta - \delta, \quad a, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

(β) Αν $a < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε ισχύει:

$$\frac{a}{\gamma} < \frac{\beta}{\delta}, \quad a, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad \text{με } a, \gamma \neq 0$$

14. Αν $x < y < \omega$, τότε να αποδείξετε ότι $(x - y)(y - \omega)(\omega - x) > 0$.

15. Να δείξετε ότι $3 < \sqrt[3]{30} < 4$. Στη συνέχεια, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$.

16. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά 5 cm. Πάνω στις ημιευθείες AB και AD παίρνουμε σημεία Z και E , τέτοια ώστε $DE = 3$ cm και $BZ = 10$ cm, αντίστοιχα. Να εξετάσετε κατά πόσο τα σημεία Z, Γ και E είναι συνευθειακά, υπολογίζοντας και συγκρίνοντας τα μήκη των πλευρών $Z\Gamma, \Gamma E$ και ZE .

