

Β' Λυκείου (Προσανατολισμού)

ΧΡΙΣΤΟΔΟΥΛΑ-ΧΡΙΣΤΙΝΑ ΓΕΩΡΓΙΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Α' ΤΕΡΑΜΗΝΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Όνομα μαθητή/ τριας:.....

Τμήμα :

Ημερομηνία :

Καλή επιτυχία!

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πιο κάτω συναρτήσεων. (μον.2)

i. $\psi = \frac{x-5}{|x|-1}$

ii. $\psi = \frac{\sqrt{x+5}}{x-2}$

2. Να βρείτε το σύνολο τιμών των πιο κάτω συναρτήσεων. (μον.2/ 1,5)

i. $\psi = x^2 - x + 3$

ii. $\psi = \begin{cases} x-2, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

3. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ και $g(x) = x+3$. (μον.0,5 /2)

- i. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια, περιττή ή τίποτα από τα δύο.
ii. Να εξετάσετε αν $f = g$. Σε περίπτωση που $f \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο $f(x) = g(x)$.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους: $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \frac{x-1}{x-4}$. (μον.3)

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$.

5. Να βρείτε συνάρτηση f , έτσι ώστε να ισχύει $(g \circ f)(x) = |\sin x|$ και $g(x) = \sqrt{1-x^2}$. (μον.2)

6. Δίνεται η συνάρτηση $f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x^2 - 4x + 2)$. (μον.2)

7. Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης $f: A \rightarrow f(A)$ με τύπο $f(x) = 2 - \sqrt{4-x}$ όπου A το πεδίο ορισμού της. (μον.3)

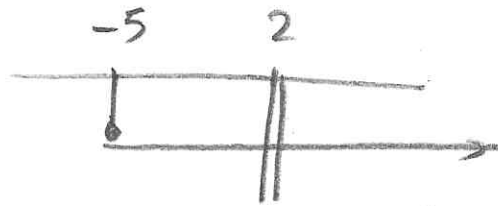
8. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1 και η καμπύλη της f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2016)$ και $B(2, 2017)$. Να λύσετε την εξίσωση: $1 + f(x^2 - 3) = f(2)$. (μον.2)

1. i $y = \frac{x-5}{x-1}$

πρέπει $|x| \neq 0 \Rightarrow |x| \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$
 $\pi.o = A = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

(ii) $y = \frac{\sqrt{x+5}}{x-2}$

πρέπει ① $x+5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5$
 ② $x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$



$\pi.o = A = [-5, 2) \cup (2, +\infty)$

2. (i) $y = x^2 - x + 3 \Rightarrow x^2 - x + 3 - y = 0$. $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(3-y) = 1 - 12 + 4y = 4y - 11 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{4y-11}}{2}$
 πρέπει $4y - 11 \geq 0 \Rightarrow y \geq \frac{11}{4} \Rightarrow \text{Σ. Τιμών} = [\frac{11}{4}, +\infty)$

(ii) $y = \begin{cases} x-2, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

εργαζομαστε στο καθε κφοδο ξεχωριστα:

$\rightarrow y = x-2 \quad x \leq 1 \Rightarrow x = y+2 \leq 1 \Rightarrow y \leq -1 \Rightarrow A = (-\infty, -1]$

$\rightarrow y = x^2 \quad x > 1 \Rightarrow y > 1 \Rightarrow B = (1, +\infty)$

$\Rightarrow$ το συνολο τιμών είναι το $A \cup B = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

3. $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, $g(x) = x+3$,

$D_f = \mathbb{R} - \{3\}$, $D_g = \mathbb{R}$
 $\Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow$ γνικ' δεν είναι ίδες

Ομως $f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = x+3$, Δy η f έχει ίδιο τύπο με την g

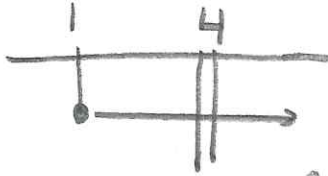
Αρα $f=g$ με $\pi.o.$ το $\mathbb{R} - \{3\}$

$$4. f(x) = \sqrt{x-1}$$

$$x-1 \geq 0 \Rightarrow$$

$$x \geq 1 \Rightarrow$$

$$A = D_f = [1, +\infty)$$



$$g(x) = \frac{x-1}{x-4}$$

$$x-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$$

$$\Rightarrow B = D_g = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$A \cap B = [1, 4) \cup (4, +\infty) \neq \emptyset$$

$$\rightarrow (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x-1} \cdot \frac{(x-1)}{x-4} = \frac{(x-1)^{3/2}}{x-4} = \frac{\sqrt{(x-1)^3}}{x-4}$$

$\mu \in \text{n.o to } A \cap B$

$$\rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x-1}}{\frac{x-1}{x-4}} = \frac{(x-4) \cdot \sqrt{x-1}}{x-1}$$

$$\text{Πρέπει } g(x) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x-1}{x-4} \neq 0 \Rightarrow$$

$$x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

$$= \frac{x-4}{\sqrt{x-1}}$$

$$\mu \in \text{n.o to } (1, 4) \cup (4, +\infty)$$

Αρα το π.ο της

$$\frac{f}{g} \text{ είναι το } A \cap B - \{1\} = (1, 4) \cup (4, +\infty)$$

$$5. (g \circ f)(x) = |awx| \Rightarrow g(f(x)) = |awx|$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-f^2(x)} = |awx| \Rightarrow 1-f^2(x) = a^2 w^2 x^2$$

$$\Rightarrow f^2(x) = 1 - a^2 w^2 x^2 \Rightarrow f^2(x) = w^2 x^2 \Rightarrow |f(x)| = |wx| \Rightarrow f(x) = \pm wx$$

$$6. f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A = [2, +\infty)$$

$$\text{Defin } g(x) = x^2 - 4x + 2$$

$$B = \mathbb{R}$$

$$B' = \{x \in B \mid g(x) \in A\}$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} x \in B \Rightarrow x \in \mathbb{R} \\ \textcircled{2} g(x) \in A \Rightarrow x^2 - 4x + 2 \geq 2 \end{array} \right\} = \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ x^2 - 4x \geq 0 \\ x(x-4) \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 \quad 4 \\ + \quad - \quad + \end{array}$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ x \in (-\infty, 0] \cup [4, +\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow B' = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty) \neq \emptyset$$

$$\text{Apa apifitas si } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 4x + 2)$$

$$\mu \in \text{n.o to } B'$$

7. $f: A \rightarrow f(A)$, $f(x) = 2 - \sqrt{4-x}$, $4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow A = (-\infty, 4]$

$\rightarrow$ η f είναι επί αφού το 2. πρώην είναι το $f(A)$

$\rightarrow$ Ελέγχω για το 1:1

Εστω x_1, x_2 με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2 - \sqrt{4-x_1} = 2 - \sqrt{4-x_2}$

$\rightarrow \sqrt{4-x_1} = \sqrt{4-x_2} \Rightarrow 4-x_1 = 4-x_2 \Rightarrow -x_1 = -x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$ Είναι 1:1

Άρα επιβεβαιώνεται η αντιστροφή και θα βρω τον τύπο της και το π.ο. της

$y = 2 - \sqrt{4-x} \Rightarrow \sqrt{4-x} = 2-y$ Πρέπει

$2-y \geq 0 \Rightarrow \boxed{y \leq 2} \Rightarrow f(A) = (-\infty, 2]$

$\sqrt{4-x} = 2-y \Rightarrow 4-x = (2-y)^2 \Rightarrow x = 4 - (2-y)^2$

$\Rightarrow x = 4 - 4 + 4y - y^2 \Rightarrow x = 4y - y^2 \Rightarrow$

$f^{-1}(x) = 4x - x^2$ με π.ο το $(-\infty, 2]$

8) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (1:1) fun map are $A(1, 2016)$
 $B(2, 2017)$

$$\begin{aligned} 1+ f(x^2-3) &= f(2) \Rightarrow f(x^2-3) = f(2) - 1 \\ \Rightarrow f(x^2-3) &= 2017 - 1 \\ \Rightarrow f(x^2-3) &= 2016 \\ \Rightarrow f(x^2-3) &= f(1) \\ f \text{ given 1:1} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} 1+ f(x^2-3) &= f(2) \\ \Rightarrow f(x^2-3) &= 2017 - 1 \\ \Rightarrow f(x^2-3) &= 2016 \\ \Rightarrow f(x^2-3) &= f(1) \\ f \text{ given 1:1} \end{aligned}} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x^2 - 3 &= 1 \\ x^2 &= 4 \Rightarrow \underline{x = \pm 2} \end{aligned}$$

$A(1, 2016) \Rightarrow f(1) = 2016$
 $B(2, 2017) \Rightarrow f(2) = 2017$