ΜΕΘΟΔΟΣ 2η

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία το πολύ ρίζα ή δύο το πολύ ρίζες κ. λ. π., εργαζόμαστε ως εξής: Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει μία παραπάνω ρίζα. Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση f στα διαστήματα μεταξύ των ριζών που υποθέτουμε ότι έχει και καταλήγουμε σε άτοπο.

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα Δ, αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα (πιθανότατα με Θεώρημα Bolzano) και μια το πολύ ρίζα σύμφωνα με τα παραπάνω.

Άσκηση 1:

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\chi^3 = 3\chi - 1$ έχει μια μοναδική λύση στο διάστημα $(0,1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Η εξίσωση (1) γράφεται: $f(x) = 0$.

- Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πολυωνυμική.
- $\left.\begin{matrix} f(0) = 1 \\ f(1) = -1 \end{matrix}\right\} f(0) \cdot f(1) < 1.$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$, δηλαδή της (1), στο διάστημα $(0,1)$.

Θα αποδείξουμε ότι αυτή η λύση είναι μοναδική.

Έστω ότι η εξίσωση (1) έχει δύο λύσεις στο διάστημα $(0,1)$, τις ρ_1, ρ_2, με $\rho_1 < \rho_2$.

- Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως πολυωνυμική και
- παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με $f'(x) = 3x^2 - 3$.
- Επίσης, $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3\xi^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \xi^2 = 1 \Leftrightarrow \xi = 1 \notin (0, 1)$ ή $\xi = -1 \notin (0, 1)$.

Αυτό όμως είναι **άτοπο** κι επομένως η εξίσωση (1) έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

Άσκηση 2:

Αν $\alpha \neq 0$, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\chi^4 + \alpha\chi^3 + \alpha^2\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ έχει **το πολύ δύο πραγματικές ρίζες**.

Έστω ότι η εξίσωση (1) έχει τρεις πραγματικές ρίζες, τις ρ_1, ρ_2, ρ_3, με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.
Έστω $f(x) = x^4 + ax^3 + a^2x^2 + \beta x + \gamma$.

- Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$ ως πολυωνυμική.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα (ρ_1, ρ_2), (ρ_2, ρ_3) με $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2a^2x + \beta$.
- $f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$.

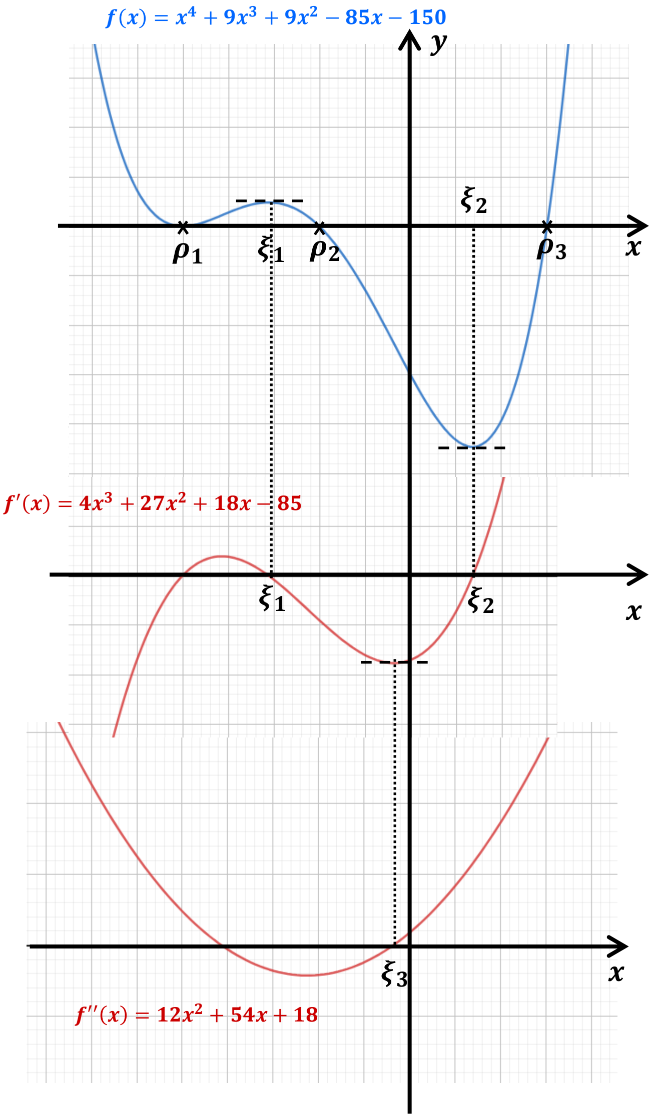
Σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = 0$ και $f'(\xi_2) = 0$.

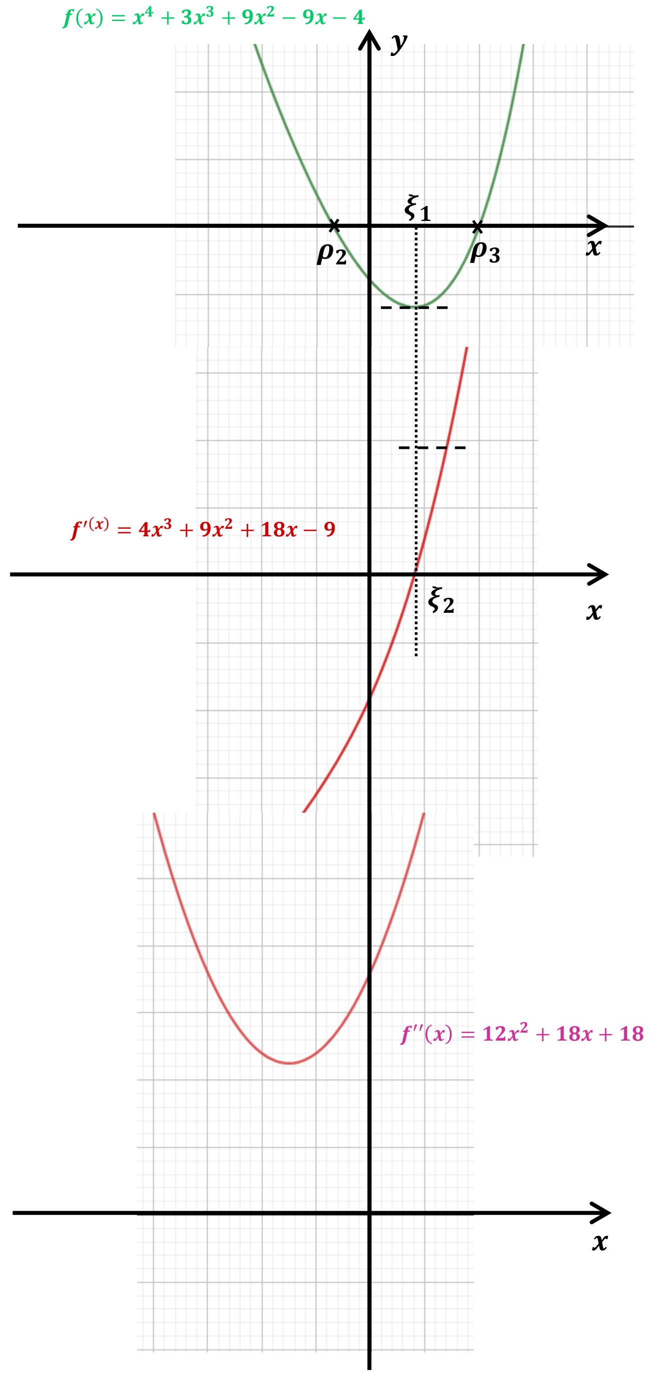
Επειδή δεν καταλήξαμε σε άτοπο, εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την f' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$:

- Η f' είναι συνεχής στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ ως πολυωνυμική.
- Η f' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (ξ_1, ξ_2) με $f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2a^2$.
- $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$ ή $12\xi^2 + 6a\xi + 2a^2 = 0$.

Αυτό είναι **άτοπο**, αφού η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, γιατί $\Delta = 36a^2 - 96a^2 = -60a^2 < 0$.
Άρα, η (1) δεν μπορεί να έχει τρεις ρίζες κι επομένως έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.





Δεν καταλήγουμε σε κανένα στάδιο σε άτοπο. Δηλαδή είναι δυνατό το ενδεχόμενο η συνάρτηση $f'(x)$ και $f''(x)$ να έχουν λύσεις.
Οπότε η αρχική συνάρτηση $f(x)$ έχει πράγματι τρεις άνισες λύσεις ρ_1, ρ_2 και ρ_3.

Καταλήγουμε σε άτοπο όταν φτάσουμε στη συνάρτηση $f''(x)$ γιατί βρίσκουμε ότι $\Delta < 0$.
Οπότε η αρχική εικασία, ότι δηλαδή υπάρχουν τρεις διαφορετικές ρίζες ρ_1, ρ_2 και ρ_3 για τη συνάρτηση $f(x)$ ισχύει. Άρα μπορεί μόνο να υπάρχουν το πολύ δύο πραγματικές και άνισες λύσεις.