

Ασκήσεις στις εκθετικές συναρτήσεις

A. Εφαρμογές της εκθετικής μεταβολής.

1. Ο αριθμός των ανθρώπων που έχουν μολυνθεί από ένα ιό βασίζεται στο πιο κάτω εκθετικό μοντέλο:

$$N(t) = 300 - 100e^{-0.5t}$$

όπου N είναι ο αριθμός των ανθρώπων που έχουν μολυνθεί και t είναι τα χρόνια μετά την ανακάλυψη του ιού.

- Πόσοι άνθρωποι είχαν μολυνθεί στην αρχή μόλις ανακαλύφθηκε ο ιός;
- Ποια είναι η μακροχρόνια πρόγνωση για την διασπορά του ιού;
- Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση του N με αναφορά το t για τις τιμές $t > 0$.

2. Ο αριθμός των αιλουροειδών P , σε ένα πληθυσμό μετά από μ μήνες βασίζεται στο μοντέλο:

$$P(t) = 12e^{0.2\mu}$$

- Να χρησιμοποιήσετε το μοντέλο αυτό για να υπολογίσετε τον πληθυσμό των αιλουροειδών μετά από:
i) 1 μήνα ii) 2.5 χρόνια
- Να εξηγήσετε τη σημασία του σταθερού 12 στο πιο πάνω μοντέλο.
- Να εισηγηθείτε ένα λόγο για τον οποίο το μοντέλο αυτό θα σταματήσει να παρέχει έγκυρα στοιχεία για μεγάλες τιμές του μ .

3. Η ατμοσφαιρική πίεση, p σε bar , στη γη μπορεί να ακολουθήσει το μοντέλο:

$$p(h) = e^{-0.13h}$$

όπου το h είναι το ύψος πάνω από τη στάθμη της θάλασσας σε Km .

- Να χρησιμοποιήσετε το μοντέλο για να βρείτε την ατμοσφαιρική πίεση σε υψόμετρο 4.394 Km πάνω από τη στάθμη της θάλασσας.
- Η πίεση σε υψόμετρο h_1 είναι 0.723 bar. Να βρείτε μια εκτίμηση για τη τιμή του h_1 με βάση το μοντέλο.
- Το συγκεκριμένο μοντέλο προβλέπει ότι η ατμοσφαιρική πίεση θα αλλάζει κατά ποσοστό $\pi\%$ για μεταβολή ενός χιλιομέτρου προς τα πάνω σε υψόμετρο. Να υπολογίσετε την τιμή του π .

4. Η αξία ενός οχήματος, A , είναι 20000€. Δύο πιθανά μοντέλα με τα οποία μειώνεται η αξία του για χ χρόνια είναι:

$$\text{Μοντέλο 1: } A(\chi) = 20000e^{-0.24\chi}$$

$$\text{Μοντέλο 2: } A(\chi) = 19000e^{-0.255\chi} + 1000$$

- Να χρησιμοποιήσετε και τα δύο μοντέλα για να προβλέψετε την αξία του οχήματος μετά από 1 χρόνο. Τί συμπεραίνετε από τα αποτελέσματα;
- Να χρησιμοποιήσετε και τα δύο μοντέλα για να προβλέψετε την αξία του οχήματος μετά από 10 χρόνια. Τί συμπεραίνετε από τα αποτελέσματα;
- Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της αξίας $A(\chi)$ ως προς το χ και για τα δύο μοντέλα.
- Ποια είναι η σημασία της σταθεράς 1000 στο Μοντέλο 2; Να εισηγηθείτε λόγους για τους οποίους αυτή η σταθερά βελτιώνει το Μοντέλο 2 σε σύγκριση με το Μοντέλο 1.

Β. Λογαριθμικές συναρτήσεις - Ορισμός

1. Να εκφράσετε τις πιο κάτω εξισώσεις στη μορφή $\log_a \beta = \gamma$ όπου α, β και γ είναι σταθερές που πρέπει να οριστούν.

a $4^4 = 256$

b $3^{-2} = \frac{1}{9}$

c $10^6 = 1\,000\,000$

d $11^1 = 11$

e $(0.2)^3 = 0.008$

2. Να εκφράσετε τις πιο κάτω εξισώσεις στη μορφή $\alpha^\beta = \gamma$ όπου α, β και γ είναι σταθερές που πρέπει να οριστούν.

a $\log_2 16 = 4$

b $\log_5 25 = 2$

c $\log_9 3 = \frac{1}{2}$

d $\log_5 0.2 = -1$

e $\log_{10} 100\,000 = 5$

3. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω μαθηματικές προτάσεις χωρίς την χρήση υπολογιστικής μηχανής.

a $\log_2 8$

b $\log_5 25$

c $\log_{10} 10\,000\,000$

d $\log_{12} 12$

e $\log_3 729$

f $\log_{10} \sqrt{10}$

g $\log_4 (0.25)$

h $\log_{0.25} 16$

i $\log_a (a^{10})$

j $\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{9}{4}\right)$

4. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις χωρίς την χρήση υπολογιστικής μηχανής.

a $\log_5 x = 4$

b $\log_x 81 = 2$

c $\log_7 x = 1$

d $\log_2 (x - 1) = 3$

e $\log_3 (4x + 1) = 4$

f $\log_x (2x) = 2$

Γ. Λογαριθμικές συναρτήσεις – Ιδιότητες λογάριθμων

1. Να γράψετε τις πιο κάτω μαθηματικές εκφράσεις στη μορφή $\log_a \beta$ όπου α και β είναι σταθερές που πρέπει να οριστούν.

a $\log_2 7 + \log_2 3$

b $\log_2 36 - \log_2 4$

c $3 \log_5 2 + \log_5 10$

d $2 \log_6 8 - 4 \log_6 3$

e $\log_{10} 5 + \log_{10} 6 - \log_{10} \left(\frac{1}{4}\right)$

2. Να γράψετε τις πιο κάτω μαθηματικές εκφράσεις στη μορφή $\log_a \beta$ όπου α και β είναι σταθερές που πρέπει να οριστούν.

a $\log_2 40 - \log_2 5$

b $\log_6 4 + \log_6 9$

c $2 \log_{12} 3 + 4 \log_{12} 2$

d $\log_8 25 + \log_8 10 - 3 \log_8 5$

e $2 \log_{10} 2 - (\log_{10} 5 + \log_{10} 8)$

3. Να γράψετε τις πιο κάτω μαθηματικές εκφράσεις χρησιμοποιώντας συναρτήσεις του A, B και Γ όπου $A = \log_a x$, $B = \log_a y$ και $\Gamma = \log_a z$

a $\log_a (x^3 y^4 z)$

b $\log_a \left(\frac{x^5}{y^2}\right)$

c $\log_a (a^2 x^2)$

d $\log_a \left(\frac{x}{\sqrt{yz}}\right)$

e $\log_a \sqrt{ax}$

4. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

a $\log_2 3 + \log_2 x = 2$

b $\log_6 12 - \log_6 x = 3$

c $2 \log_5 x = 1 + \log_5 6$

d $2 \log_9 (x + 1) = 2 \log_9 (2x - 3) + 1$

5. α) Αν $\log_3(x + 1) = 1 + 2 \log_3(x - 1)$ να δείξετε ότι $3x^2 - 7x + 2 = 0$

β) Έπειτα να λύσετε την εξίσωση $\log_3(x + 1) = 1 + 2 \log_3(x - 1)$

6. Έστω ότι $\alpha > \beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha > 0, \beta > 0$. Να λύσετε το σύστημα:

$$\alpha + \beta = 13$$

$$\log_6 a + \log_6 b = 2$$

7. Να αποδείξετε ότι $\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$

Δ. Εκθετικές συναρτήσεις

1. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις. Να δώσετε την απάντησή σας σε 3 δεκαδικά ψηφία.

a $2^x = 75$

b $3^x = 10$

c $5^x = 2$

d $4^{2x} = 100$

e $9^{x+5} = 50$

f $7^{2x-1} = 23$

g $11^{3x-2} = 65$

h $2^{3-2x} = 88$

2. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις. Να δώσετε την απάντησή σας σε 3 δεκαδικά ψηφία.

a $2^{2x} - 6(2^x) + 5 = 0$

b $3^{2x} - 15(3^x) + 44 = 0$

c $5^{2x} - 6(5^x) - 7 = 0$

d $3^{2x} + 3^{x+1} - 10 = 0$

e $7^{2x} + 12 = 7^{x+1}$

f $2^{2x} + 3(2^x) - 4 = 0$

g $3^{2x+1} - 26(3^x) - 9 = 0$

h $4(3^{2x+1}) + 17(3^x) - 7 = 0$

3. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις. Να δώσετε την απάντησή σας σε 3 δεκαδικά ψηφία.

a $5^x = 2^{x+1}$

b $3^{x+5} = 6^x$

c $7^{x+1} = 3^{x+2}$

4. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις. Να δώσετε την απάντησή σας σε 3 δεκαδικά ψηφία.

i) a $e^{2x} - 8e^x + 12 = 0$

b $e^{4x} - 3e^{2x} = -2$

c $(\ln x)^2 + 2 \ln x - 15 = 0$

d $e^x - 5 + 4e^{-x} = 0$

e $3e^{2x} + 5 = 16e^x$

f $(\ln x)^2 = 4(\ln x + 3)$

ii) a $\ln(8x - 3) = 2$

b $e^{5(x-8)} = 3$

c $e^{10x} - 8e^{5x} + 7 = 0$

d $(\ln x - 1)^2 = 4$

5. Να λύσετε $3^x e^{4x-1} = 5$. Να δώσετε την απάντησή σας στη μορφή $\frac{\alpha + \ln b}{c + \ln d}$

6. Στο πιο κάτω διάγραμμα αποτυπώνεται η γραφική

παράσταση της συνάρτησης $y = 3 + \ln(4 - x)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Β.

